Ellipse – Hyperbole – Parabola.

Este precioso exemplar foi-me offerecido por tia Silvia ao partir para Europa.

Paulo.

Paulo Carneiro

Rio: 23 - Moysés - 132 / 23 - Janeiro - 20

# Ensino Pozitivista.

## Lógica.

### Geometria Preliminar.

Coordenação especial.

10ª Lição

Teoria das secções planas do cone circular.

I

Instituição desse estudo pelo exame do problema que condus à parábola.

II

Apreciação das outras duas secções cônicas; seu confronto com a parábola.

III

Generalização da apreciação dêssas curvas, primeiro consideradas segundo as suas propriedades focais, e depois quanto à sua producção por um cone circular oblíquo

R. Teixeira Mendes.

Rio, 8 de Gutenberg de 110. / 20 de Agosto de 1898.

Ensino Pozitivista

Lógica.

Geometria Preliminar.

Coordenação especial.

10ª. Lição.

Teoria das secções cônicas.

---

I

Instituição desse estudo pelo ezame do problema que condus à parábola.

1. Reflexões preliminares sobre o objeto e a importância da 10ª. e 11ª. lição da Geometria Preliminar.

2. As curvas que vamos estudar fôrão quázi todas inventadas para rezolver os problemas rezultantes do primitivo surto da geometria e como tais relativos à medida da estensão. Esses problemas são: a duplicação do cubo, a trisecção do ângulo, e a quadratura do círculo. Os dois primeiros constituem cazos particulares de duas questões gerais: determinar um cubo múltiplo de outro; dividir um ângulo em um número qualquér de partes iguais. Todos fôrão póstos desde o período teocrático. Consideraremos hoje só o primeiro, concernente à duplicação do cubo.

A lenda relativa a tal problema (os délios sofrião de uma péste e man-

dárão consultar o oráculo) tem a importância de assinalar a sua origem teocrá-tica e caraterizar a consagração religióza que assim adquirirão as pesquizas mais abstratas (Vide Allman, pg. 85).

Depois de ter-se conseguido construir polígonos similhantes em uma razão dada, éra natural procurar estender o mesmo gênero de problemas aos poliédros similhantes. O cazo mais simples que se oferecia éra o de duplicar um cubo, isto é, determinar a arésta de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de outro cubo, tambem determinado pela sua arésta. A comparação dos paralelipípedos retângulos já tendo feito reconhecer que os volumes dos cubos estão entre si como as terceiras potências das arêstas, o problema da duplicação do cubo reduzia-se a determinar uma linha cujo cubo fosse o dobro do cubo de uma outra. Com o sistema algébrico que prevaleceu entre os modérnos, ter-se-ia assim a equação do terceiro grau $x^3 = 2a^3$. Mas o sistema das proporções conduziu os antigos a encarar o problema por outra fórma, fazendo depender da determinação de duas médias proporcionais entre o lado do cubo conhecido e o dobro desse lado. A menór das médias éra o lado do cubo pedido.

3. Para instituir o problema a módo dos antigos, isto é, fazendo-o depender da determinação de duas médias proporcionais, eis o raciocínio que paréce natural. Antes de tudo convem lembrar que o problema análogo quanto aos quadrados depende da determinação de uma média proporcional entre o lado do quadrado dado e o dobro do mesmo lado. Este fato devia ter induzido a procurar uma solução similhante para o cazo do cubo.

Isto posto, imaginemos justapóstos dois cubos iguais ao cubo conhecido; assim colocados eles fórmão um paralelipípedo de volume igual ao do cubo pedido. Suponhamos que o problema estava rezolvido, e figuremos, tambem jus-

taposto a uma das faces maiôres desse paralelipípedo, o cubo que lhe é equivalente. Vê-se lógo que este cubo póde ser considerado como composto de dois paralelipípedos, um tendo para altura a arésta do cubo primitivo, e o outro tendo para altura o ecésso da arésta do cubo duplo sobre a arésta do cubo dado.

Óra, si compararmos o paralelipípedo rezultante da justapozição dos cubos conhecidos com o maiôr dos que compõem o cubo duplo, póde-se tomar para altura comum a arésta do cubo dado. Desde então os seus volumes são proporcionais às suas bazes, isto é, temos a proporção:

$$P : P' :: R : Q,$$

chamando P e P' os paralelipípedos, R a baze do maiôr e Q a baze do menôr.

$$R = 2a.a\,; \quad Q = x^2\,,$$

chamando a a arésta do cubo dado e x a do cubo pedido.

Comparando agóra o cubo incógnito com o maiôr dos seus paralelipípedos componentes, póde-se tomar para altura comum o lado do cubo incógnito. Eles serão pois proporcionais às suas bazes. Teremos assim a proporção:

$$C : P' :: Q : r$$

chamando C o cubo pedido, e r a baze do paralelipípedo P', quando se toma x para a sua altura. Ésta baze r é igual a a.x.

Mas como o cubo C é igual ao paralelipípedo P, a última proporção comparada com a primeira dará

$$R : Q :: Q : r$$

Porem Q póde ser transformado em um retângulo que tenha um lado igual a a como R, si tomarmos $Q = a.y$. Então a proporção

precedente se muda nésta:

$$2a : y :: \mathcal{L} : r.$$

Mas, desde que $\mathcal{L} = a.y$, e $r = a.x$, tem-se:

$$\mathcal{L} : r :: y : x.$$

E portanto

$$2a : y :: y : x.$$

Óra, por outro lado, $\mathcal{L} = x.x$, $r = a.x$; portanto

$$\mathcal{L} : r :: x : a;$$

ou $y : x :: x : a$; isto é, $2a : y :: y : x :: x : a$;

ou o lado x do cubo desconhecido é a segunda média proporcional entre 2a e a.

Das duas proporções:

$$2a : y :: y : x, \quad e \quad y : x :: x : a,$$

se conclúi:

$$y^2 = 2a.x,$$

$$y = \sqrt{2a.x},$$

$$x^2 = ay = a\sqrt{2ax},$$

$$x^4 = 2a^3x,$$

ou

$$x^3 = 2a^3$$

Ésta instituição do problema da duplicação do cubo é atribuida a Hipócrates de Chio, já conhecido pelas lúnulas. De sórte que vê-se que ele preocupou-se com os dois problemas da duplicação do cubo e da quadratura do círculo (V século antes da éra católica) 450 (?). Contemporâneo de Hipócrates de Cos, mais vélho que Sócrates (V. Allman).

Generalização: arésta do cubo múltiplo de outro:

$$x^3 = ma^3$$

$$ma : y :: y : x :: x : a.$$

$$ma : y :: y : x; \qquad y : x :: x : a$$

$$y^2 = max; \quad y = \sqrt{max}$$

$$x^2 = ay; \quad x^2 = a\sqrt{max}; \quad x^4 = ma^3x; \quad x^3 = ma^3$$

Reflessões sobre as raizes désta equação e sua conexção com o problema.

4. Uma vês chegados a este rezultado, os gêometras da antiguidade tentárão rezolver o problema empregando as propriedades da linha réta e do circulo, e portanto uzando da régua e do compasso. Nesse intuito a sua meditação dirigiu-se para a utilização da teoria das linhas proporcionais. O primeiro gêometra que deu uma solução da questão foi Árquitas de Tarento, pitagórico, contemporâneo de Platão (428-347), fins do V século e primeira metade do IV século antes da éra catolica (Vide Allman).

A sua solução foi bazeada nas propriedades da perpendicular baixada do vertice do ângulo réto do triângulo retângulo sobre a hipotenuza. O estudo déssas propriedades devia ter conduzido a escóla pitagórica, talvês o próprio Árquitas, a reconhecer que projetando um dos catetos sobre a hipotenuza, e depois éssa projeção sobre o mesmo cateto, e assim por diante; a hipotenuza e todas éssas projeções fórmão uma progressão geometrica, confórme já vimos.

Desse teorema rezulta que, si pudéssemos construir um triângulo retângulo no qual a hipotenuza fosse a maiór das duas linhas dadas, e a segunda das projeções mencionadas igual à menór das mesmas linhas, o problema deliano estaria rezolvido.

Óra para construir esse triângulo nóte-se que ele déve ser um dos que são sucetiveis de ser inscritos no sêmi-circulo que tem para diâmetro a

maiór das rètas dadas. Assim é fácil de conceber a série de triângulos retângulos que têm para hipotenuza a maiór das linhas dadas. Vejamos como reprezentar-nos a série análoga que corresponde à menór das linhas dadas. A figura que então se ofereceu a Arquitas como mais simples foi o cone. Com efeito, considére-se um cone, e o plano que passa pelo vértice e um diâmetro da baze, e que suporemos horizontal para comodidade da descrição. Imagine-se depois que a geratris parte da intersecção do dito plano com o cone e descréve a superficie dêste. Nas suas pozições sucessivas, éla vai formando, com a sua projeção sobre o dito plano horizontal, todos os ângulos desde zéro até o sêmi-ângulo do cone. Isto posto, si tomarmos, néssa geratris, a partir do vértice, uma grandeza igual à menór das linhas dadas, a sua estremidade descreverá um circulo cujo plano será perpendicular ao plano horizontal. A intersecção desses dois planos será uma rèta perpendicular ao eixo do cone.

Imaginando agóra uma das pozições da geratris e a projeção horizontal correspondente, tire-se, no plano das duas, uma perpendicular à primeira, pela estremidade da menór das rètas dadas. Prolongue-se éssa perpendicular até à projeção da geratris, e levante-se a vertical correspondente ao ponto de encontro. O ponto em que ésta vertical encontrar a geratris póde ser tomado para pé de uma nóva perpendicular à dita geratris. E prolongando-se similhante perpendicular até à projeção horizontal désta, obter-se-á um triângulo retângulo entre cuja hipotenuza e a menór das rètas ezistirão duas médias proporcionais.

Vê-se pois que os triângulos retângulos que correspôndem à menór das rètas dadas pódem ser considerados como dispóstos de módo que os catetos sobre os quais éla é tomada fórmem uma superfície cônica qualquér. Mas cada cone só conterá assim os triângulos retângulos nos quais o ângulo da menór das

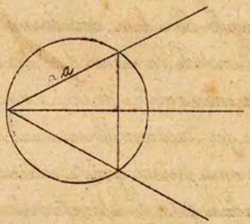
linhas dadas com a hipotenuza fôr menôr do que o sêmi-ângulo do cone. Isto é, cada cone só conterá os triângulos retângulos cuja hipotenuza varia entre a menôr das linhas dadas e uma cérta reta de grandeza determinada. Quanto maiôr fôr o sêmi-ângulo do cone, tanto mais estensa será a série dos triângulos compreendidos.

¿Qual será o lugar geométrico dos vértices desses triângulos sobre o cone? Para rezolver ésta questão imaginemos um dos triângulos. O seu vértice é obtido pela seguinte construção, como acabâmos de indicar: da estremidade da menôr das rétas tira-se uma perpendicular que encontre a projeção da geratris do cone sobre o plano horizontal. Esse ponto é o pé da perpendicular à projeção da geratris; e a intersecção dessa vertical com a geratris dá o vértice do triângulo. Pois bem, consideremos o diâmetro horizontal do círculo descrito pela estremidade da menôr das rétas e a parte da projeção da geratris compreendida entre o vértice do cone e o seu encontro com a primeira das perpendiculares que traçâmos. Essas duas rétas se córtão em um ponto do qual se levanta uma vertical que é a intersecção do plano do referido círculo com o plano do triângulo. Similhante vertical é ao mesmo tempo uma ordenada ao diâmetro do círculo de que se trata, e a altura do triângulo retângulo que tem para cateto a menôr das rétas dadas. Como ordenada ao diâmetro, éla é média proporcional entre os segmentos deste; e como altura do triângulo, éla é média proporcional entre os segmentos da hipotenuza. Donde se conclúi que o produto dos segmentos do diâmetro horizontal do círculo de que se trata é igual ao produto dos segmentos que ele determina na parte da projeção da geratris que estamos considerando.

Rezulta daí que as estremidades déssas duas linhas ezistem na circunferência de um círculo de que élas são córdas. Óra, considerando um no-

vo triângulo correspondente a qualquér outra pozição da geratris e a menór das duas rétas dadas, verifica-se que o pé da perpendicular baixada do vértice do ângulo réto, ezistirá néssa mesma circunferência. Porque, a circunferência em que ele se acha déve passar, como a primeira, pelo vértice do cone e pelas estremidades do diâmetro horizontal do círculo descrito pela menór das linhas dadas. Descóbre-se assim que os vértices dos triângulos achando-se em verticais que pássão pelos pontos déssa circunferência, ezistirão sobre a superfície de um cilindro réto que tem para baze a dita circunferência.

Portanto, rezumindo: imagine-se um cone de ângulo conveniente, cortado por um plano que passa pelo eixo e que suporemos horizontal. Em uma das geratrizes horizontais, tome-se a partir do vértice uma parte igual à menór das rétas, e tire-se o diâmetro horizontal do círculo que lhe corresponde. Circunscreva-se um círculo ao triângulo assim obtido. Este círculo será a baze de um cilindro sobre cuja superfície




se áchão os vértices dos triângulos retângulos que rezólvem o problema deliano, para os cazos da menór das rétas dadas nos quais o ângulo que éla fórma com a hipotenuza for menór que o sêmi-ângulo do cone.

Vê-se que se póde variar o ângulo do cone, e, com cada ângulo, obtem-se um novo cilindro, para a mesma réta que é igual à menór das rétas dadas. Mas, com cada cilindro, só podemos imaginar a solução do problema, nos cazos em que a menór das rétas dadas for inferior ao diâmetro da baze do cilindro. Escolhido, pois, o cilindro, o ângulo do cone será tanto mais agudo, quanto menór for a diferença entre as duas linhas dadas. Re

conhéce-se então que a maiór das linhas tende a ser igual ao diâmetro da baze do cilindro. Esse diâmetro reprezenta o limite mínimo das maiores das retas dadas que pódem figurar na solução com cada cilindro.

Á vista désta observação é-se levado a escolher, para baze do cilindro um círculo de diâmetro igual à maiór das linhas dadas. Mas então para ter, no cilindro, o lugar geométrico dos vértices do triângulo que se busca basta imaginar um sêmi-círculo vertical do mesmo diâmetro que girasse em torno do vértice do cone. A intersecção de tal circunferência com a superfície cilíndrica traçaria nésta o lugar geométrico de que se trata.

<u>Geração do tóro</u>. — Isto posto, o problema deliano fica rezolvido imaginando que a arésta do cone gira até encontrar similhante curva.

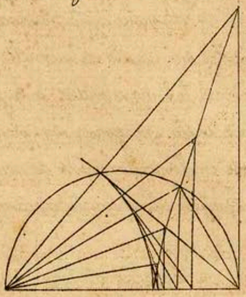
Tal paréce ter sido a filiação das idéias que conduzirão Árquitas à sua solução.

Depois dele, sabe-se que o problema foi rezolvido por Eudóxio de Cnido (mas ignóra-se a sua solução), dicípulo de Árquitas. Naceu em 407 mais ou menos antes da éra católica.

"Ha, porem, uma conjetura acerca das curvas empregadas por Eudóxio; um escritor francês pensa que o termo καμπύλαι γραμμαί tem no testo de Eratóstenes uma significação particular, e que, comparado com o καμπύλατοξα de Homéro, por ezemplo, sugére a idéia de uma curva simétrica em relação a um eixo, que éla cortasse normalmente e aprezentando uma inflexão de cada lado desse eixo." (V. Allman, p. 141).

Á vista désta observação somos levados a pensar que a curva de que se trata foi obtida procurando o lugar geométrico dos vértices dos triângulos-retângulos que tivéssem para segunda das projeções sucessivas, a que acima

aludímos, a menór das retas dadas. Esses triângulos serão obtidos imaginando que o lado cateto sobre o qual éla é contada toma todas as pozições a partir da hipotenuza. Os vértices de seus ângulos rétos fórmão uma cérta curva

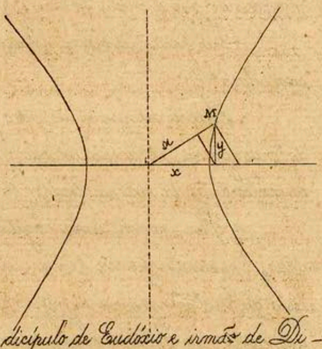


cuja interseção com a circunferência correspondente à maiór das linhas dadas, determinará o triângulo que convem.(1) Éssa curva podia ser traçada por pontos, mas não consta que o seu estudo fosse feito. A equação rezulta imediatamente da figura

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad a\sqrt{x^2+y^2}=x^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2=x^4$$

$$a^2y^2=x^4-a^2x^2$$




E fazendo $a=1$,

$$y^2=x^4-x^2;$$

curva que foi apreciada por nósso Méstre na sua Geometria Analítica, pag. 261.

Éstas soluções ezigindo o emprego de curvas de um traçado pouco cômodo, o problema continuou a solicitar a atenção dos geômetras. Menécmo, dicípulo de Eudóxio e irmão de Dinostrato, o inventor da quadratriz, contenporâneo de Platão (350-330) e mais moço do que este, foi então conduzido a inventar as secções planas do cone

(1) São as curvas imaginadas por Descartes na sua Geometria, p. 18-21 (Vide Geometria Analítica).

Ele determinava as duas médias proporcionais ou pela intersecção de duas parábolas ou pela intersecção de uma parábola com uma hipérbole equilátera. Mas as suas soluções nos fôrão transmitidas sob uma fórma que não indica a filiação de suas idéias (V. Allman). Eis a conjetura que nos paréce provável.

A sua descubérta liga-se à de Árquitas e à de seu méstre Eudóxio. Nós vímos que Árquitas fôra conduzido à sua solução procurando utilizar-se das propriedades da perpendicular baixada, no triângulo retângulo, do vértice do ângulo réto sobre a hipotenuza. Nesse intuito ele serviu-se da progressão que rezulta da projeção do cateto sobre a hipotenuza. Menécmo partiu dirétamente das propriedades da perpendicular, que é média proporcional entre os segmentos da hipotenuza; o emprego que Árquitas fizéra do cone e do cilindro o conduzia naturalmente a dirigir as suas meditações sobre tais superfícies.

Isto posto, paréce que ele devia ter-se proposto a achar um lugar geométrico de todas as perpendiculares que fôssem média proporcional entre uma reta de grandeza determinada e todas as outras. Esse problema encarado em abstrato condus lógo à equação $y^2 = ax$. Mas não foi assim que Menécmo o déve ter considerado. Para ele a perpendicular de que se trata estava ligada ao triângulo retângulo e ao circulo circunscrito a este. Portanto foi o <u>lugar</u> dos vértices dos triângulos retângulos assim construídos que tivéssem a mesma projeção de um dos catetos que ele dévé se ter proposto a achar, imaginando esses triângulos dispóstos de um módo conveniente.

Colocado nésta direção, as suas meditações não dévem ter tardado a lhe indicar que a mais simples hipóteze consistia em imaginar

os sêmi-circulos dispóstos paralélamente entre si, e perpendiculares a uma réta passando pelos seus centros. Desde então os sêmi-circulos pertencerião a uma superfície cônica tendo a dita reta para eixo, e a série dos diâmetros para plano mediano. O lugar geométrico dos vértices dos triângulos retângulos se aprezentaria assim como uma cérta curva cônica, cuja propriedade caraterística restava a descubrir. Óra, a contemplação da figura patenteia lógo que o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de tais vértices é uma linha réta paraléla a uma das geratrizes estremas do cone. E, portanto, que as perpendiculares de que se trata formarião um plano. O lugar geométrico procurado seria então a secção de um cone por um plano.

À vista disto Menécmo éra levado a descubrir a espressão da perpendicular nas linhas ligadas a éssa curva e aos dados do problema. Bastava, para atingir similhante objetivo, considerar uma qualquér das perpendiculares, já no circulo, já na curva. Como pertencendo ao circulo, tinha-se $y^2 = a.z$. Porem $z$ póde ser espresso por meio da abcissa da curva em virtude da proporção $\frac{z}{x} = \frac{a}{b}$, chamando $b$ a distância da origem da curva ao vértice do cone. Donde $z = \frac{a}{b}.x$; e portanto $y^2 = \frac{a^2}{b}.x$. Enfim $b$ póde ser espresso só por meio de $a$, si imaginar-se que o ângulo do cone é réto, cazo no qual o plano da secção se tórna perpendicular à geratris. De fato então $b$ é média proporcional entre $a$ e $\frac{a}{2}$, e obtem-se finalmente para a parábola $y^2 = \sqrt{2a}.a.x$.

Paréce que foi esse o motivo que levou Menécmo e os antigos até Apolônio a escolhêrem o cone réto e a secção normal à arésta.

Uma vês descubérta a parábola, a solução do problema deliano reduziu-se a achar a intersecção de duas parábolas, cruzando-se nos seus vértices, cujos eixos fôssem perpendiculares, e tendo respetivamente para

parâmetros, as duas linhas entre as quais se procurávão as duas médias.

$$2a:y::y:x, \quad e \quad y:x::x:a$$

dão

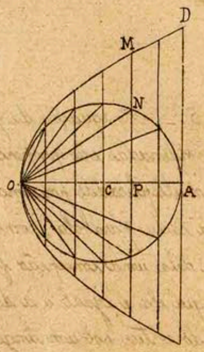
$$y^2 = 2ax$$
$$x^2 = ay.$$

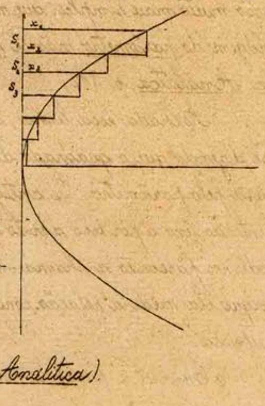
5.— A equação da parábola nos indica pois que os quadrados do ordenadas são proporcionais às abcissas, isto é, são iguais às abcissas multiplicadas por uma reta constante. Essa reta carateriza cada parábola, como o raio carateriza cada círculo; convem, pois, ter déla uma concepção fácil e habitual. A equação da curva móstra que éla é igual « à distância ao eixo da estremidade da córda tirada do vértice sob um ângulo de 45° ($x = a$, vem $y^2 = a^2$ ou $y = a = x$). Qualquér outro ponto do lugar determinaria igualmente éssa constante, segundo a lei $a = \frac{y^2}{x}$; mas ésta oferéce a vantágem de uma construção muito mais simples, que meréce tornar-se familiar, para que a imágem do parâmetro não se separe jamais da da curva. (Geometria Analítica, p. 312).

Achada éssa linha, a equação da parábola póde enunciar-se dizendo que o quadrado da ordenada é igual ao retângulo da abcissa pelo parâmetro. Os antigos levantávão éssa linha perpendicularmente ao eixo e por isso dávão-lhe o nome de latus erectum, donde os modérnos passárão a chamá-la latus rectum, e por fim parâmetro, porque éla méde a relação constante do quadrado da ordenada para a abcissa.

« Enfim, a parábola sendo, depois do círculo, a mais simples de

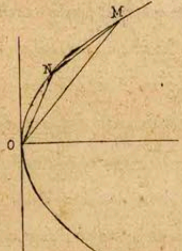
todas as curvas, convem notar, a respeito dêssa equação, o módo fácil segundo o qual poder-se-ia deduzir uma da outra, lembrando-se que os comprimentos das divérsas córdas circulares tiradas de um mesmo ponto estão ligadas às suas projeções sobre sobre o diâmetro correspondente da mesma maneira que as ordenadas parabólicas depêndem das suas abcissas. Si portanto prolongássemos as ordenadas NP de um círculo relativamente a um diametro qualquér OCA de maneira a torná-las iguais às córdas correspondentes ON, os pontos M assim obtidos formarião uma parábola, cujo parâmetro seria igual ao diâmetro do círculo, e que tal traçado estenderia sómente até o ponto D, que, segundo a indicação precedente, sérve para marcar cômodamente o parâmetro.» Similhante construção póde indicar-nos o número de pontos determinantes da parábola. Porque, cada círculo determinando uma parábola, desde que se menciona o ponto donde começa a construção, a parábola exigirá, para sua inteira determinação, em grandeza e pozição, um ponto mais do que o círculo. A parábola será pois determinada por quatro pontos. (Geometria Analitica).



6. A equação da parábola permite efetuar a quadratura do segmento convéxo, tomando para baze a abcissa estrema, afim de instituir a pesquiza. Porque tirando rétas paralélas a éssa baze, tais rétas reprezentarão as abcissas correspondentes aos divérsos pontos da curva, ao passo que as ordenadas constituirão as distâncias déssas abcissas ao vértice da parábola. Óra, as abcissas variando proporcionalmente aos quadrados das ordenadas, séguem no seu decrecimento a mesma lei que as secções paralélas à baze de uma pirâmide em relação à altura da pirâmide. Isto é, si construissemos uma pirâmide tendo uma baze numéricamente igual à baze do segmento parabólico convéxo (abcissa) e, para altura, a altura do dito segmento (ordenada), as secções paralélas da pirâmide serião numéricamente reprezentadas pelas abcissas da parábola colocadas à mesma distancia do vértice. Donde se conclúi que os elementos prismáticos da pirâmide serião espréssos pelos mesmos números que os elementos retangulares da parábola. A soma desses elementos déve pois ser espréssa pelo mesmo número nos dois cazos. E, como o volume da pirâmide é um terço da baze pela altura, a ária do segmento parabólico convéxo será igual a um terço da baze pela altura. Daí se conclúi que o segmento côncavo é igual a dois terços do mesmo retângulo.

«Arquimédes descubriu este importante rezultado sob uma fórma que meréce ser conservada, considerando a ária ONM compreendida entre o arco parabólico OM e a sua córda» (<u>Geometria analitica</u>).




7. Marcha de Arquimédes.

Para compreensão da marcha de Arquimédes, é necessário o conhecimento de cértas propriedades da parábola.

A comparação da reta com o circulo conduziu a duas noções capitais, a das tangentes e a dos diâmetros, cuja conexão estabelecêmos. A primeira já foi definida com toda a sua generalidade de módo a aplicar-se a qualquér curva. O mesmo não dá-se porem com a segunda. De fato, considerada como a córda que passa pelo centro, similhante reta não encontra análoga sinão em um número muito limitado de curvas. Convem, pois, tomar, para definição dos diâmetros um outro atributo sucetível, por sua natureza, de motivar uma apreciação similhante para todas as curvas, e mesmo para todas as superfícies. É o que se conségue, considerando a propriedade que tem cada diâmetro circular de ser o lugar geométrico dos meios de um cérto sistema de córdas paralélas.

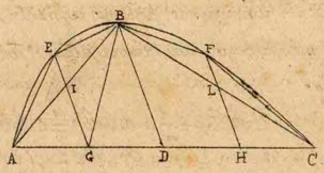
Descóbre-se ésta propriedade notando que o diâmetro circular que passa pelo meio de uma córda, passa pelo meio de todas as que lhe fôrem paralélas. Porque tal diâmetro será perpendicular ao sistema de córdas de que se trata, e formará, com os raios que vão aos estremos de cada uma déstas, triângulos iguais. Isto posto, toda réta que passar pelo meio de duas córdas paralélas, tendo dois pontos comuns com o diâmetro que é sempre possível imaginar pelos mesmos pontos, coincidirá com ele, e atravessará, portanto, os meios de todas as córdas paralélas às duas primeiras. Óra, assim definida, a noção de diâmetro aplica-se a qualquér córda, salvo a dificuldade de determinar em cada cazo o lugar geométrico correspondente. Veremos em geometria geral que tais lugares são em geral curvas mais complicadas do que as curvas donde provêm: raras vezes são retilíneos, sobretudo indistintamente retilíneos. Mas concébe-se que, desde que o diâmetro for uma linha mais simples do que a curva donde ele rezultou, a sua consideração déve contribuir muito para caraterizar a fórma de tal curva. Similhante órdem de considerações póde apenas

ser esboçada agóra, devendo nós voltar a élas na geometria geral.

Podemos agóra indicar as noções sobre as quais Arquimédes bazeou a sua descubérta. Embóra conhecidas dos antigos, tais noções dévem normalmente ser instituídas pelos métodos devidos à renovação cartezjana. Nos limitaremos pois a mencioná-las.

Os antigos já tinhão descubérto que os diâmetros da parábola érão paralélos ao eixo, e que a tangente em cada ponto éra paraléla ao sistema das córdas correspondentes ao diâmetro relativo ao ponto de contacto. Considerando o segmento parabólico, compreendido entre um arco da curva e a sua córda, o ponto em que a tangente é paraléla a ésta córda é o vértice do segmento. Esse ponto determina-se tirando pelo meio da córda uma paraléla ao eixo, si este for conhecido; ou traçando uma segunda córda paraléla à primeira e descrevendo a réta que une os meios de ambas.

Isto posto, Arquimédes parte da seguinte propozição:




Propozição XXI do Tratado da Quadratura da Parábola: « Si inscrevermos no segmento um triângulo da mesma baze e da mesma altura, e depois, nos segmentos que ficão assim formados, dois nóvos triângulos tambem da mesma baze e da mesma altura que esses segmentos, o triângulo do segmento total é igual a oito vezes qualquér dos triângulos dos segmentos parciais. »

Para demonstrar ésta propozição, Arquimédes estabeléce na XIX que « si em um segmento parabólico fôrem tiradas duas rétas paralélas ao eixo, u-

ma do meio da baze e outra do meio da metade da baze; a que é tirada do meio da baze é igual a quatro terços da que é conduzida do meio da metade da baze.»

Isto é,

$$BD = \frac{4}{3} EG = 2IG$$

$$EG = \frac{3}{2} IG$$

$$EI = EG - IG = \frac{3}{2} IG - IG = \frac{1}{2} IG$$

Portanto:

$$\triangle AEI = \frac{1}{2} \triangle AIG$$

$$\triangle BEI = \frac{1}{2} \triangle BIG$$

$$\triangle AEI + \triangle BEI = \triangle AEB = \frac{1}{2}(\triangle AIG + \triangle BIG) = \frac{1}{2} \triangle ABG$$

Porem $\triangle ABG = \frac{1}{4} \triangle ABC$

Portanto $\triangle AEB = \frac{1}{8} \triangle ABC$

Próva-se do mesmo módo que:

$$\triangle BFC = \frac{1}{8} \triangle ABC$$

Assim $\triangle AEB + \triangle BFC = \frac{1}{4} \triangle ABC$

Inscrevendo, pois, nos segmentos sucessivamente formados triângulos da mesma baze e da mesma altura, tem-se, para a soma deles, a expressão:

$$\triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \frac{1}{16} \triangle ABC + \frac{1}{64} \triangle ABC + \ldots\ldots =$$

$$= \triangle ABC \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \triangle ABC = \frac{1}{\frac{3}{4}} \triangle ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC.$$

Este foi o método da <u>invenção</u>; Arquimédes, obedecendo aos preconceitos da época, demonstrou, em seguida, esse rezultado <u>por absurdo</u>.

---

## II

Apreciação das outras duas secções cônicas; seu confronto com a parábola.

1. A solução do problema deliano tendo conduzido Menécmo a instituir a parábola, mediante a secção do cone retângulo por um plano normal à arésta, éra natural que ele ezaminasse quais as curvas que rezultarião das secções planas do cone acutângulo e do cone obtuzângulo. O estudo da parábola o induziria a supor, como no cazo do cone retângulo, que o plano da secção éra normal à arésta. Consideremos em primeiro lugar a secção do cone acutângulo.

2. Vê-se lógo que obtem-se assim uma curva fechada e simétrica em relação à réta que rezulta da intersecção do seu plano com o plano mediano do cone que lhe é perpendicular e que se tórna então o plano principal do cone. Éssa réta constitúi pois um eixo da curva, isto é, um diâmetro perpendicular às respetivas córdas.

Para determinar a relação das ordenadas para as abcissas, isto é, a equação da curva, sigamos a marcha adotada no cazo da parábola, cortando a secção por um plano paralelo à baze do cone. A intersecção dos dois planos será normal ao eixo da nóva curva e ao diâmetro do circulo. Daí se conclúi que a ordenada da curva será a média proporcional entre os segmentos do diâmetro do circulo correspondente. Résta transformar éssa equação natural, introduzindo os elementos dirétos da nóva curva. Para isso imaginem-se dois planos paralélos à baze do cone e tirados pelas estremidades do eixo desta. As intersecções desses planos com o plano principal do cone determinarão duas rétas

que serão as bazes de um trapézio tendo para diagonal o eixo da curva. Ora, cada um dos triângulos assim formados nesse trapézio fica cortado paralélamente às suas bazes pelo diâmetro do circulo aussiliar; e os segmentos desse diâmetro serão portanto as bazes de dois triângulos respetivamente similhantes aos do trapézio. Comparando, pois, os triângulos análogos, obtém-se duas proporções que permitem esprimir os ditos segmentos por meio das bazes e da diagonal do referido trapézio, e dos dois segmentos em que a ordenada divide o eixo da curva.

Para formular êssas proporções, chamemos $\underline{a}$ o eixo da curva; $\underline{\mathcal{D}}$, o diâmetro do maiór dos circulos constantes; $\underline{d}$, o diâmetro do menór desses circulos; $\underline{\delta}$, o diâmetro do circulo variável; $\underline{z}$ um dos segmentos deste; e $\underline{x}$ a abcissa correspondente da curva.

A consideração dos triângulos nos quais entrão: $\underline{z}$, $\underline{x}$, $\underline{a}$, e $\underline{\mathcal{D}}$, nos dará algébricamente:

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{\mathcal{D}}; \qquad z = \frac{\mathcal{D}}{a} \cdot x,$$

ou, em portuguès: a relação entre um dos segmentos do diâmetro do circulo variável e a abcissa correspondente da curva é igual à relação entre o eixo da curva e o diâmetro do maiór dos circulos constantes.

E a consideração dos triângulos nos quais êntrão: o outro segmento do circulo variável $(\delta - z)$, o ecésso do eixo da curva sobre a abcissa $(a - x)$, o eixo da curva $\underline{a}$, e o diâmetro do menór dos circulos constantes, dará algébricamente:

$$\frac{a-x}{\delta - z} = \frac{a}{d}; \quad \delta - z = \frac{d}{a} \cdot (a - x),$$

ou, em linguágem vulgar, o ecésso do eixo da curva sobre a abcissa está para o segundo segmento do circulo variável, como o eixo da curva está para o diâmetro do menór dos circulos constantes.

Substituindo as espressões que êssas proporções rezúltão para os segmentos do diâmetro do circulo variável na equação da ordenada em formação deles, ter-

-se-á enfim a equação:

$$y^2 = z(\delta - z) = \frac{Dd}{a^2}\, x(a-x)$$

ou

$$\frac{y^2}{x(a-x)} = \frac{Dd}{a^2},$$

isto é, a relação entre o quadrado da ordenada e o produto ou o retângulo dos segmentos em que ela divide o eixo da curva é constante. Este enunciado é o análogo ao que esprime, no círculo, a relação da ordenada para os segmentos do diâmetro; sómente neste cazo a relação de que se trata é igual à unidade.

A equação supra móstra que o maiór valor do quadrado da ordenada corresponde ao mássimo do produto $x(a-x)$, ou $\frac{a^2}{4}$, o que dá, para a ordenada mássima que chamaremos b:

$$b = \frac{\sqrt{Dd}}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{Dd}$$

ou

$$\sqrt{Dd} = 2b \quad e \quad Dd = 4b^2;$$

o que se podia reconhecer dirétamente, imaginando que o plano do círculo variável passava pelo meio do eixo da curva.

Introduzindo éssa constante b, mássimo da ordenada, na equação da curva em vês dos diâmetros dos círculos primitivamente adotados, teremos:

$$y^2 = \frac{4b^2}{a^2}x(a-x) = \frac{4b^2}{a}x - \frac{4b^2}{a^2}x^2.$$

Por analogia à parábola, chama-se parâmetro o coeficiente de x; vê-se assim que o quadrado da ordenada é igual ao retângulo da abcissa pelo parâmetro, menos a ária $\frac{4b^2}{a^2}x^2$. Óra, na parábola, o quadrado da ordenada é igual ao retângulo do parâmetro pela abcissa; e veremos que, na secção do cone obtuzângulo o quadrado da ordenada é igual a esse retângulo aumentado de uma cérta ária. Foi desse fato que Apolônio derivou os tres nomes dados às secções cônicas: parábola, quér dizer igualdade; elipse, falta; e hipérbole, ecésso.

Tomando para origem das abcissas o meio do eixo da seção e entrando com o valor da ordenada que corresponde a esse ponto, a equação da elipse toma uma fórma mais elegante que preparou o seu tipo normal. Neste cazo, a ordenada que correspondia a uma abcissa $\underline{x}$ passa a corresponder a uma abcissa $(\frac{a}{2}-x)$; isto é, na equação supra é precizo substituir $\underline{x}$ por $(\frac{a}{2}-x)$ para ter a mesma ordenada.

$$y^2=\frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(a-\frac{a}{2}+x\right)=$$
$$=\frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{a-2x}{2}\right)\left(\frac{a+2x}{2}\right)=$$
$$=\frac{\cancel{4}b^2}{\cancel{4}a^2}(a^2-4x^2)=$$
$$=b^2-\frac{4b^2x^2}{a^2},$$

ou,

$$a^2y^2+4b^2x^2=a^2b^2.$$

Ésta equação móstra que a elipse é tambem simétrica em relação à perpendicular tirada pelo meio do eixo; éssa perpendicular constitue, pois, um segundo eixo da curva. Óra, a equação como está aprezenta ainda uma dezigualdade algébrica no tratamento desses dois eixos que convem fazer dezaparecer, fazendo com que o eixo maiór figure tambem pela sua metade. Fazendo éssa substituição de $\underline{a}$ por $\underline{2a}$, teremos:

$$4a^2y^2+4b^2x^2=4a^2b^2$$

ou simplesmente

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

que é a equação normal da elipse.

A consideração déssa dupla simetria móstra lógo que o ponto de intersecção dos dois eixos é o meio de todas as córdas que por ele pássão. Daí a denominação de centro dada a esse ponto, relativando a concepção oriun-

da do circulo. As córdas que pássão pelo centro são os diâmetros.

3. As secções planas do cone levárão a examinar as secções planas do cilindro. Mas então a secção não póde deixar de ser uma curva fechada, a menos que não se tórne duas paralélas ou uma geratriz. No princípio admitiu-se que tais secções érão as mesmas elipses obtidas no cone; mais tarde surgirão dúvidas si se poderião obter no cilindro as mesmas curvas que no cone. Para desfazê-las, Sereno, um geômetra dos meiados do V século (450) da éra católica, escreveu um tratado especial. O exame da equação de tal lugar geométrico basta para dissipar qualquér hezitação a este respeito.

A marcha para obter similhante equação é a mesma. Imagine-se o plano mediano do cilindro que é normal ao plano da secção e que chamaremos por isso principal. Córte-se depois a secção por um plano paralélo às bazes do cilindro. A intersecção deste plano com o da secção será uma ordenada da curva e do circulo, e, como tal, média proporcional entre os segmentos do diâmetro do circulo. Isto posto, considerando dois outros planos paralélos às bazes do cilindro e passando pelos estremos do eixo da curva, obtem-se um retângulo no plano principal, tendo para diagonal o eixo da curva. O diâmetro do circulo variável cortará os dois triângulos determinados por essa diagonal paralélamente às bazes do retângulo e produzirá dois triângulos similhantes aos primeiros. Comparando esses triângulos entre si, chega-se à equação entre a ordenada e a abcissa da secção.

Para obtê-la, chamemos $R$ o raio da baze do cilindro; $a$ o eixo da secção; $x$ a sua abcissa correspondente à ordenada $y$; seja $z$ finalmente um dos segmentos do diâmetro do circulo móvel, correspondente à ordenada $y$. Teremos:

$$y^2 = z\,(2R - z)$$

$$\frac{z}{x} = \frac{2R}{a},$$

donde

$$z = \frac{2R}{a}\cdot x$$

$$y^2 = \frac{2R}{a}\cdot x\left(2R - \frac{2R}{a}\cdot x\right)$$

$$y^2 = \frac{4R^2}{a}\cdot x - \frac{4R^2}{a^2}\cdot x^2$$

Procurando o valor da ordenada que corresponde ao sêmi-eixo $x = \frac{a}{2}$, e que chamaremos *b*, teremos:

$$b^2 = \frac{4R^2}{a}\cdot\frac{a}{2} - \frac{4R^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{4}$$

$$b^2 = 2R^2 - R^2 = R^2$$

ou $$b = R.$$

O nósso estudo anterior nos léva a tomar para orígem o meio do eixo, e a substituir o eixo pelo sêmi-eixo. Ésta substituição transfórma a equação supra em:

$$y^2 = \frac{4R^2}{2a}\cdot x - \frac{4R^2}{4a^2}\cdot x^2,$$

ou,

$$y^2 = \frac{2R^2}{a}\cdot x - \frac{R^2}{a^2}\cdot x^2.$$

Desde então, mudando *x* em $(a-x)$, vem:

$$y^2 = \frac{2R^2}{a}(a-x) - \frac{R^2}{a^2}(a^2 - 2ax + x^2)$$

ou,

$$y^2 = 2R^2 - \frac{2R^2}{a}x - R^2 + \frac{2R^2}{a}\cdot x - \frac{R^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = R^2 - \frac{R^2}{a^2}\cdot x^2$$

ou, finalmente:

$$a^2y^2 + R^2x^2 = R^2a^2.$$

Isto móstra que o círculo póde ser considerado como a projeção ortogonal de uma elipse convenientemente escolhida, o que permite reduzir a qua-

dratura da elipse à do circulo mediante a lei geral sobre a projeção das árias planas.

Para descubrir similhante lei, basta considerá-la em relação ao triângulo. Porque daí éla se estenderá diretamente aos polígonos encarados como agregados triangulares. Desde então a sua generalização rezulta de sêrem as árias curvilíneas o limite de árias poligonais retilíneas.

Ezaminemos, pois, a relação que eziste entre a ária de um triângulo retilíneo e a sua projeção ortogonal. Para isso, imaginemos o ângulo diédro formado pelos planos das duas árias. O ângulo retilíneo correspondente será obtido baixando de qualquér dos vértices do triângulo projetado a perpendicular sobre a arésta e unindo o pé dêssa perpendicular ao vértice correspondente do triângulo projetante. Com efeito ésta última réta será tambem perpendicular à arésta. É o que se reconhéce comparando primeiro os triângulos que ûnem a réta projetante do dito vértice a dois pontos da arésta simetricos em relação ao pé da perpendicular que foi baixada da projeção do mesmo vértice. Da igualdade desses triângulos, conclúi-se a das suas hipotenuzas, o que revéla a perpendicularidade da réta que une o vértice projetante à arésta.

A consideração da figura móstra depois que os triângulos que ûnem as tres rétas projetantes à arésta, por meio do ângulo correspondente das duas árias, são similhantes. Donde rezulta que a relação das suas hipotenuzas para as respetivas projeções é constante. Ésta constante definindo o ângulo dos dois planos póde ser tomada para a caraterística de tal ângulo.

Isto posto, vê-se que as árias, quér do triângulo projetado quér do projetante, são a diferença entre a soma das árias de dois trapézios e a

ária de um terceiro trapézio, cuja altura é a soma das alturas dos dois primeiros. Desde então, a comparação das árias dos triângulos, projetante e projetado, redus-se ao confronto das árias desses trapézios. Óra, isto requér únicamente a comparação repetida da ária de qualquér dos trapézios correspondentes ao triângulo projetante com a ária da projeção do mesmo trapézio. Chamando $\underline{a}$ e $\underline{b}$ as bazes do trapézio correspondente a um dos lados do triângulo projetante, e $\underline{h}$ a sua altura, espontâneamente dada pelo lado que está na arésta do ângulo dos dois planos, e que é ao mesmo tempo a altura da projeção de tal trapézio; chamando $\underline{a'}$ e $\underline{b'}$ as projeções de $\underline{a}$ e $\underline{b}$; $\underline{m}$ a relação constante $\frac{a'}{a}$ e $\frac{b'}{b}$, teremos:

$$a' = ma, \quad b' = mb$$

A ária do trapézio projetante será dada pela fórmula $\frac{1}{2}(a+b)h$; e a de sua projeção pela fórmula $\frac{1}{2}(ma+mb)h$ ou $\underline{m}\,\frac{1}{2}(a+b)h$. Ou, em português, a ária projetada é igual à ária projetante multiplicada pela carateristica angular dos seus planos.

Chamando, pois, $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ as árias trapezoidais correspondentes ao triângulo projetante e $\underline{a'}$, $\underline{b'}$ e $\underline{c'}$ as árias análogas relativas ao triângulo projetado, ter-se-á para a primeira ária a espressão: $\underline{a+b-c}$; e para a segunda $\underline{ma+mb-mc}$ ou $\underline{m(a+b-c)}$. Isto é, em linguágem vulgar, a ária do triângulo projetado é igual à ária do triângulo projetante multiplicada pela caraterística angular dos seus planos. Donde rezulta, primeiro a mesma lei para os polígonos retilíneos planos quaisquér, e enfim para as curvas planas, as quais pódem sempre ser consideradas como limites de polígonos retilíneos

Tal é a lei geral que, à vista da orígem cilindrica da elipse, redus a sua quadratura à do circulo. A caraterística angular das á-

rios projetante e projetada é então dada pela relação entre o diâmetro do circulo e o eixo maiór da elipse: de sórte que $m = \frac{2R}{2a}$ ou $\frac{R}{a}$. Donde rezulta, para ária da elipse, a espressão $\pi R^2 \frac{a}{R}$ ou $\pi R a$, ou $\pi ab$ sem nenhuma refrência esplícita ao circulo.

Tambem é fácil reconhecer que a projeção ortogonal do circulo é uma elipse tendo para eixo maiór o diâmetro do circulo. Com efeito, para simplificar o confronto das duas figuras, imaginemos que o plano de projeção passa pelo diâmetro, o que não restringe em nada a questão. Chamando $y$ a ordenada do circulo correspondente a um segmento $x$ do diâmetro, tem-se

$$y^2 = (2R - x)x$$

E sendo $m$ a caraterística angular dos dois planos, a projeção de $y$ que chamaremos $z$, será $my$. Donde rezulta a equação da curva projetada

$$z = my \quad \text{ou}$$

$$z^2 = m^2(2R - x)x$$

ou

$$z^2 = 2m^2Rx - m^2x^2$$

O mássimo de $y$ sendo $R$, o mássimo de $z$ será $mR$, e corresponde ao centro do circulo que será tambem centro da curva projetada. Tomando este centro para origem das abcissas e substituindo $m$ pela relação $\frac{b}{R}$, na qual $b$ reprezenta a projeção de $R$, ter-se-á:

$$z^2 = 2\frac{b^2}{R^2}R(R - x) - \frac{b^2}{R^2}(R^2 - 2Rx + x^2)$$

ou

$$z = 2b^2 - \frac{2b^2}{R}x - b^2 + \frac{2b^2}{R}x - \frac{b^2}{R^2}x^2$$

ou

$$z^2 = b^2 - \frac{b^2}{R^2}x^2$$

ou finalmente a equação

$$R^2 x^2 + b^2 x^2 = R^2 b^2,$$

na qual se reconhéce uma elipse tendo para eixo maiór $2R$ e para eixo menór $\underline{b = mR}$.

A nóssa lei sobre a projeção das árias planas nos daria para ~~eixo~~ ária dêssa elipse $\underline{m \pi R^2}$ ou $\frac{b}{R} \cdot \pi R^2$, ou finalmente $\pi R b$, como acima.

4. Instituição da hipérbole.

Examinemos agóra a secção do cone obtuzângulo. As secções do cone retângulo e do cone acutângulo pudérão ser apreciadas sem que se estendesse a primitiva concepção de similhante superfície. Outro tanto não se deu, porem, com a secção do cone obtuzângulo. A equação da curva não poude ser obtida sem que se considerássem ao mesmo tempo as duas superfícies simultâneamente geradas pela revolução dos ângulos verticalmente opóstos. Tal foi a origem do primeiro ~~alongamento~~ alargamento dado à concepção do cone, depois que tal superfície já éra considerada como infinita, confórme solicitava a plena concepção da parábola. Mas tambem éssa consideração simultânea dos cones conjugados ou das duas folhas de cada cone, como hoje dizemos, constitui talvês a maiór dificuldade no estudo, e portanto, na instituição da hipérbole. Porque uma vês familiarizado com tal idéia, Menécmo ficara de pósse de todos os elementos indispensáveis para a comparação fundamental da hipérbole com o circulo.

Consideremos, pois, um cone obtuzângulo e o seu conjugado. É este conjunto que chamaremos cone, confórme a definição geral que foi dada na teoria do plano. E imaginemos que se córta tal superfície por um plano normal a uma das arêstas. Vê-se lógo que similhante plano cortará ao mes-

mo tempo as duas folhas do cone, determinando duas curvas infinitas, que se é levado a princípio a supor análogas à parábola. Para esclarecer-nos a tal respeito, imagine-se como para as outras duas secções já examinadas, o plano principal do cone em relação à secção, as secções circulares correspondentes às origens das curvas, e uma secção circular variável em cada um dos ramos. Éssas secções variáveis dévem ser apreciadas sucessivamente para comparar as duas curvas assim simultâneamente obtidas.

Tomando, pois, uma das secções circulares variáveis, tem-se como nos cazos anteriores, entre a ordenada da curva e os segmentos do diâmetro do círculo a equação:

$$y^2 = z(\delta - z).$$

Résta a esprimir os segmentos $\underline{z}$ e $(\delta - z)$, por meio da abcissa da curva e das constantes ligadas a éla, a saber os diâmetros $\underline{D}$ e $\underline{d}$ dos círculos relativos às origens, e bem assim a réta que une éssas origens, e que chamaremos $\underline{a}$.

Para achar a relação entre $\underline{z}$ e $\underline{x}$ cumpre comparar o triângulo variável em que élas êntrão com o seu verticalmente oposto contanto que tenha para baze o diâmetro do círculo da origem opósta. Obtem-se assim a proporção:

$$\frac{z}{x} = \frac{d}{a} \qquad z = \frac{d}{a} \cdot x.$$

Quanto ao segmento $\underline{(\delta - z)}$, é precizo comparar o triângulo de que ele é baze e que tem o vértice na outra folha do cone, com o triângulo que tem o mesmo vértice e para baze $D$. Obtem-se assim a proporção:

$$\frac{\delta - z}{a + x} = \frac{D}{a} \qquad \delta - z = \frac{D}{a}(a + x).$$

Déstas duas proporções rezúltão, para $\underline{z}$ e $\underline{(\delta - z)}$, valores que, substituídos na equação $y^2 = z(\delta - z)$ a transfórmão em:

$$y^2 = \frac{Dd}{a^2}\, x(a+x)$$

ou

$$y^2 = \frac{Dd}{a}\, x + \frac{Dd}{a^2}\, x^2.$$

O que lógo impressiona é a analogia désta equação com a da elipse. As constantes $\underline{D}$ e $\underline{d}$ reprezêntão, em ambos os cazos, os diâmetros dos circulos correspondentes aos vértices, já da elipse, já dos dois ramos hiperbólicos; e a constante $\underline{a}$ indica de uma parte e doutra a porção do eixo que une os vértices. A equação da hipérbole rezulta da da elipse mudando o sinal do coeficiente de $x^2$. Esse confronto seria suficiente si os dois ramos se achássem na respetiva folha do cone na mesma pozição; porque então esses dois ramos serião idênticos e apenas voltados para partes opóstas. Nós poderiamos, em tal cazo, modificar os nóssos hábitos na consideração das curvas, e encarar esses dois ramos como partes separadas de uma única __fórma__. Ésta reflessão déve ter conduzido a ezaminar a equação do ramo hiperbólico ezistente na segunda folha do cone.

Mantendo as mesmas dezignações para as constantes, que são evidentemente as mesmas nos dois cazos chamemos $\underline{z_1}$ e $\underline{\delta_1}$ um segmento e o diâmetro do circulo variável correspondente a uma ordenada do segundo ramo tão distante do seu vértice quanto o éra a ordenada do primeiro ramo. Teremos a equação:

$$y_1^2 = z_1(\delta_1 - z_1).$$

Para substituir os elementos hiperbólicos aos do circulo comparemos os triângulos análogos aos do cazo precedente. Teremos as proporções:

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{D}{a}; \qquad z_1 = \frac{D}{a}\cdot x_1$$

$$\frac{\delta_1 - z_1}{a + x_1} = \frac{d}{a} \qquad \delta_1 - z_1 = \frac{d}{a}(a + x_1)$$

Dónde rezulta:

$$y_1^2 = \frac{Dd}{a^2} \cdot x_1 (a + x_1)$$

Por ésta equação se reconhéce que, para $x_1 = x$, virá $y_1 = y$; o que móstra a identidade dos dois ramos. Mas desde então se reconhéce que, unindo as estremidades das ordenadas iguais, têm-se retângulos cujas diagonais se crúzão no meio de a. E recíprocamente, esse ponto divide ao meio todas as córdas tiradas de um ramo para outro e que por ele pássão; isto é, este ponto será um centro da curva. Descóbre-se assim finalmente que os dois ramos serão simétricos a uma perpendicular tirada pelo dito ponto no plano da hipérbole.

A ezistência do centro permite dar à equação da hipérbole uma fórma mais elegante, na qual a dupla simetria geométrica é tradusida algébricamente como na equação normal da elipse. Com efeito, escolhendo o centro para orígem, as ordenadas correspondentes a $x$ e a $x_1$ vêm a corresponder a $(x - \frac{a}{2})$. Substituindo pois $x$ ou $x_1$ por $x - \frac{a}{2}$, teremos a nóva equação:

$$y^2 = \frac{Dd}{a^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(a + x - \frac{a}{2}\right)$$

ou

$$y^2 = \frac{Dd}{a^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right);$$

$$y^2 = \frac{Dd}{a^2}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right);$$

$$y^2 = \frac{Dd}{a^2}x^2 - \frac{Dd}{4}$$

A analogia désta equação com a da elipse, nos léva a introdusir a constante geométrica $4b^2 = Dd$, embóra não póssa éla ter a mesma significação que na elipse, e nos résta, portanto, achar-lhe uma interpretação concréta ligada à hipérbole. Desde então a equação se tornará:

$$y^2 = \frac{4b^2}{a^2} \cdot x^2 - \frac{4b^2}{4}$$

E fazendo entrar o eixo a pela sua metade, isto é, substituindo a por 2a:

$$4a^2y^2 - 4b^2x^2 = -4a^2b^2$$

ou

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

equação que só difére da da elipse pela substituição de $b^2$ por $-b^2$.

Os hábitos algébricos levárão os modérnos a denominar ésta constante b de eixo imaginário da hipérbole, denominando ao eixo de eixo transvérso. Tambem se chama o primeiro de eixo não transvérso.

5 Confronto das três curvas.

O conjunto do estudo até aqui realizado léva-nos a comparar agóra as três secções cônicas sob o ponto de vista das condições de similhança. Vê-se lógo que todas as parábolas serão similhantes entre si, como sendo obtidas por secções paralélas do mesmo cone, o cone retângulo sendo único. Ao passo que as elipses e as hipérboles só serão similhantes quando obtidas no mesmo cone acutângulo, ou no mesmo cone obtuzângulo[1]. Óra, tais curvas terão sempre os seus eixos proporcionais, confórme se conclúi passando das secções piramidais para as secções cônicas. Tal é a condição de similhança das elipses e hipérboles fácilmente descubérta pelo próprio Menécmo, pelas considerações em que vamos entrar.

6. Origem da concepção das assíntotas.

A comparação das secções paralélas do mesmo cone poucas mo-

---

[1] Cumpre ter prezente que por óra estamos considerando as secções

ções nóvas introduzirão para apreciação da parábola ou da elipse, alem das condições de similhança. Pois que no cazo da parábola apenas se reconhéce que a secção feita no vértice do cone tórna-se então uma simples arésta paraléla ao eixo da curva. E, na elipse, a secção no vértice do cone redus-se a esse mesmo vértice, isto é, a um ponto. Outrotanto não acontéce com a hipérbole. Quando a secção passa pelo vértice obtêm-se duas rétas cujo ângulo depende do ângulo do cone e cujo confronto com as hipérboles correspondentes às secções paralélas deu lugar a noções geométricas capitais.[1] Para efetuar similhante confronto, comecemos por determinar as equações de tais rétas, referindo-as às constantes de uma das hipérboles paralélas.

Imaginemos, pois, uma das hipérboles paralélas a essa pozição estrema, e bem assim as secções cônicas correspondentes aos seus vértices e obtidas por planos normais ao eixo do cone. Figuremos finalmente um plano qualquer tambem normal ao eixo do cone e cortando portanto, ao mesmo tempo a hipérbole e as rétas cuja equação se trata de instituir.

A ordenada das rétas será média proporcional entre os segmentos do diâmetro da secção circular variável; e para esprimir esses segmentos em formação da abcissa das rétas a contar do vértice do cone, compárem-se os triângulos que têm as bazes neles e os vértices no vértice do cone, com os triângulos respetivamente similhantes que têm os vértices nos vértices da hipérbole e as bazes nos diâmetros das secções circulares que passão por estes vértices.

Com as convenções anteriores teremos, chamando $y_1$ a ordenada das rétas limites das hipérboles:

$$y_1^2 = z(\delta - z)$$

---

cônicas como feitas sempre normalmente à arésta do cone réto.

[1] Distinção geral que este fato fornéce quanto à fórma da parábola comparada com um ramo da hipérbole.

$$\frac{z}{x} = \frac{D}{a}, \qquad z = \frac{D}{d} \cdot x$$

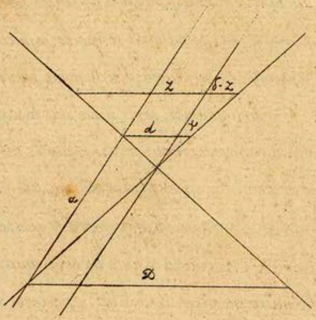
$$\frac{\delta - z}{x} = \frac{d}{a}, \qquad \delta - z = \frac{d}{a} \cdot x$$

E, portanto:

$$y_1^2 = \frac{Dd}{a^2} \cdot x^2.$$

Vê-se que ésta equação é a das hipérboles paralélas privada do termo do primeiro grau em x.

Isto posto, a consideração da figura móstra lógo que, para a mesma secção do cone por um plano perpendicular ao eixo, em um dos ramos da hipérbole, a ordenada déssas rétas limites, que é a principio maiór, acaba por ser menór do que a a da curva. De sórte que, si ésta e as ditas rétas fôssem traçadas no mesmo plano de módo que as ordenadas da mesma secção circular coincidissem, a hipérbole cortaria as rétas. Mas, no outro ramo da hipérbole, as ordenadas désta serião sempre menóres. Essas comparações tornão-se mais precizas, porem não mais claras, confrontando as equações da hipérbole com a das rétas limites.



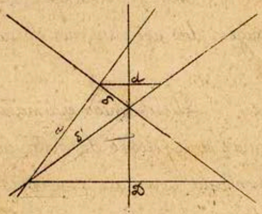

Mas a noção do centro déve então ter feito ocorrer a idéia de deslocar as rétas limites no plano da curva, de módo a colocar no centro o ponto de cruzamento das rétas. Éstas ficarião assim na mesma pozição em relação aos dois ramos da curva. E este deslocamento patenteou que a diferença entre os quadrados das ordenadas da curva e das rétas de que se trata é

ra constante, e, portanto, que a diferença das ordenadas tendia para zéro. Foi assim que Menécmo devia ter chegado à consideração das assintotas. A teoria da linha réta tinha conduzido à noção de linhas que jamais se encontrávão, por conservárem entre si a mesma distância. No cazo atual tem-se uma curva que se aprossima sempre de uma réta, sem nunca encontrá-la, ou encontrando-a no infinito, o que é o mesmo. Reflessões filozóficas.

A equação da hipérbole, $y^2=\frac{Dd}{a^2}\cdot x^2+\frac{Dd}{a}\cdot x$, devia conduzir a ezaminar o cazo em que $Dd$ fosse igual a $a^2$, isto é, a ver qual o cone em que ésta igualdade se dava. Neste cazo, a equação das assintotas se tórna $y^2=x^2$; e as assintotas são perpendiculares entre si. Neste cazo, teremos:

$a^2=Dd \qquad a^2=\delta'^2-\delta^2 \qquad a^2=D^2-(\delta+\delta')^2$

$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{d}{D} \qquad \delta=\frac{d}{D}\delta'$




$a^2=\delta'^2-\frac{d^2}{D^2}\delta'^2=\delta'^2\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)$

$a^2=D^2-\left(\frac{d}{D}\delta'+\delta'\right)^2=D^2-\delta'^2\left(\frac{d}{D}+1\right)^2$

$\delta'^2=\frac{a^2}{1-\frac{d^2}{D^2}}$

$$a^2=D^2-\frac{a^2}{1-\frac{d^2}{D^2}}\left(1+\frac{d}{D}\right)^2=D^2-\frac{a^2\left(1+\frac{d}{D}\right)^2}{\left(1-\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d}{D}\right)}=D^2-\frac{a^2\left(1+\frac{d}{D}\right)}{1-\frac{d}{D}}=D^2-$$

$$-\frac{\frac{a^2(D+d)}{D}}{\frac{D-d}{D}}=D^2-\frac{a^2(D+d)}{D-d}.$$

$a^2(D-d)=D^2(D-d)-a^2(D+d)$

$a^2(D-d)+a^2(D+d)=D^2(D-d)$

$a^2D-a^2d+a^2D+a^2d=D^3-D^2d$

$2a^2D=D^3-D^2d$

$$2a^2 = D^2 - Dd$$

$$2a^2 = D^2 - a^2$$

$$3a^2 = D^2 \text{ ou } a\sqrt{3} = D;$$

Isto é, $D$ é o lado do triângulo equilátero de que $\underline{a}$ é o raio do circulo circunscrito. E, da equação $\underline{a^2 = Dd}$, rezultando a proporção:

$$\frac{D}{a} = \frac{a}{d},$$

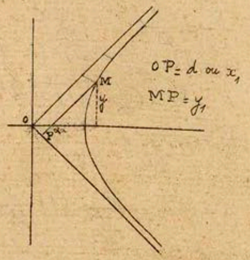
conclúi-se que $\underline{a}$ é o lado do triângulo equilátero de que $\underline{d}$ é o raio do circulo circunscrito.

Assim, no cazo da hipérbole equilátera, o eixo transvérso é o lado do triângulo equilátero de que $\underline{d}$ é o raio do circulo circunscrito, o que permite traçar o cone correspondente, conhecido o eixo tranvérso.

Isto posto, a equação da hipérbole referida ao seu centro para origem das abcissas, nos daria:

$$y^2 = x^2 - \frac{a^2}{4}$$

Desde então éra natural procurar a expressão da distância de um ponto da curva às assíntotas, contando essa distância segundo as perpendiculares baixadas do dito ponto sobre as assíntotas:




$$\overline{\alpha M}^2 = 2y^2 = 2\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$2d^2 = (x-y)^2 = \left(x - \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2$$

$$\overline{\alpha M} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$x_1 = d = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}\right)$$

Donde:

$$y_1 = \sqrt{2}\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}\right)$$

$$y_1 x_1 = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2$$

$$= x\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} - x^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{a^2}{8} - x\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$y_1 x_1 = \frac{2a^2}{8} - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{8}, \quad \text{ou} \quad y_1 x_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}$$

Isto é, o retângulo da abcissa pela ordenada referidas às assintotas é igual à metade do quadrado do sêmi-eixo transverso.

Ésta equação da hipérbole equilátera conduziu Menécmo a uma outra solução do problema deliano. Das proporções:

$$2a : y :: y : x$$

$$y : x :: x : a$$

rezúltão as equações:

$$y^2 = 2ax$$

$$x^2 = ay$$

$$y^2x^2 = 2a^2yx \quad \text{ou}$$

$$yx = 2a^2$$

Combinando pois uma das duas parábolas, $y^2 = 2ax$ ou $x^2 = ay$, com a hipérbole equilátera $yx = 2a^2$, as coordenadas da interseção corresponderão às duas médias proporcionais pedidas.

A equação das assintotas nos permite achar finalmente uma significação geometrica para a constante $b$ definida pela equação $4b^2 = \mathfrak{D}d$. Com efeito, a equação das assintotas $y^2 = \frac{\mathfrak{D}d}{a^2}\cdot x^2$, redus-se então a $y^2 = \frac{4b^2}{a^2}x^2$; ou substituindo $a$ por $2a$, isto é, introduzindo o sêmi-eixo transverso:

$$y^2 = \frac{4b^2}{4a^2}\cdot x^2,$$

donde rezulta:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

O que mostra que construindo o retângulo dos dois eixos a e b, as assintotas serão reprezentadas pelas diagonais indefinidamente prolongadas. Na hipérbole equilátera b torna-se igual a a. A constante b reprezenta pois a porção da tangente no vértice compreendido entre as assintotas.

7. Consideração das três secções no mesmo cone réto.

Até aqui estudâmos êssas três curvas segundo o módo pelo qual élas fôrão instituidas por Menécmo e apreciadas pelos geômetras gregos até Apolônio. Este, porem, retomando os trabalhos dos seus predecessores, começou por deduzir as três curvas de qualquér cone circular réto e mesmo do cone circular oblíquo em condições convenientes. Procurando reconstruir a filiação histórica das discubértas de Menécmo, mostrâmos que ele devia ter sido espontâneamente conduzido a encarar primeiro a parábola como a secção feita, em qualquér cone circular réto, por um plano paralélo à sua geratris. Si ele preferiu as secções normais do cone retangular, foi pela simplicidade de obter a curva de acordo com as constantes introduzidas pelo problema deliano. Uma vês posto nésta direção, ele foi levado a caraterizar a elipse e a hipérbole como sendo respetivamente as secções do cone acutângulo e do cone obtuzângulo.

Colocado, porem, em um ponto de vista mais abstrato, Apolônio éra naturalmente levado a só atender aos problemas diretamente ligados à fórma das curvas. Desde então éra natural que ele começasse por suprimir todas as restricções alheias a êssa fórma. As três curvas passárão assim a ser consideradas como derivando indistintamente do mesmo cone circular. Seria, porem, ociozo retomar similhante ezame para mostrar que, em qualquér cone circular réto, a secção feita por um plano pa-

ralêlo[1] à uma arêsta dá a parábola; a secção por um plano que côrta duas geratrizes opóstas dá uma elipse; e a secção feita por um plano que côrta as duas folhas produzirá uma hipérbole. Tudo isso é fácil de reconhecer com os hábitos contraídos em virtude do estudo que acabâmos de fazer.

Passaremos, pois, agóra a considerações mais gerais sobre êssas três curvas.

## III

Generalizacção da apreciação dêssas curvas, primeiro consideradas segundo às suas propriedades focais, e depois, quanto à sua producção por um cone circular oblíquo.

### 1. Considerações preliminares.

« Todas as propriedades essenciais dêssas três curvas não pódem ser especialmente ligadas à sua origem cônica sem dezenvolver este estudo além do que convem ao domínio normal da geometria preliminar. É prezizo, pois, rezervar para a geometria geral a apreciação de muitos atributos importantes, apezar da sua aparente simplicidade, sobretudo quanto ao número de pontos determinantes, que seria difícil assinar de outra fórma. Nada déve entretanto impedir de terminar a quinta lição de geometria especial indicando a origem cônica das propriedades focais.

### 2. Origem cônica das propriedades focais da elipse e da

---

[1] Este ezame no cazo da parábola já foi aliás feito acima, confórma acabâmos de lembrar.

hipérbole.

A apreciação que acabâmos de fazer déstas curvas manifésta desde lógo uma lacuna capital. Referimo-nos à impossibilidade de traçá-las por um movimento contínuo. Os antigos não ficárão, porem, por muito tempo privados de similhante recurso, graças à descubérta de dois pontos notáveis ezistentes no eixo maiór da elipse e no eixo transvérso da hipérbole. Os mais remótos tratados sobre as secções cônicas (devidos a Aristeus e a Euclides), se tendo perdido, os dados mais antigos a tal respeito cônstão das óbras de Apolônio. E aí não se encontra a origem cônica de tais pontos, a que Képler deu o nome de fócos (do latim focus, fogão, lar),[1] pelo qual eles ficárão conhecidos. Para Apolônio, os fócos érão pontos rezultantes da aplicação (ἐκ. τῆς παραβολῆς), e o problema que os determinava éra: dividir o eixo em segmentos cujo produto fosse igual à quarta parte da figura. A figura éra o retângulo construido sobre o grande eixo ou o eixo transvérso e o latus rectum. Sem dúvida, o ponto de vista em que Apolônio colocou-se no estudo cônicas o fis preferir similhante propriedade para caraterizar os fócos.

Procurando, porem, reconstruir a filiação perdida da descubérta de tais pontos, um geômetra contemporâneo (Quetelet) conseguiu uma construção que coincide com a que é indicada por nósso Méstre, no enunciado seguinte:

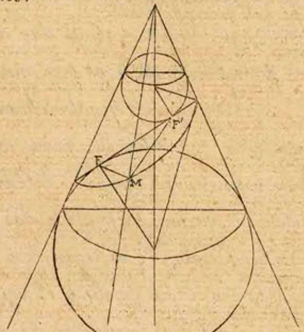
« Élas (as propriedades focais) pódem fácilmente sobresair do tri-

---

[1] « Nós lucis causa et oculis in Mechanicam intentis ea puncta Focos appellabimus » (Képler, Vide Taylor LVII)

ângulo formado pelo eixo da secção com as duas geratrizes estremas; ele se tórna um paralelogramo indefinido no cazo parabólico. Si projetar-se sobre esse eixo as intersecções das duas bissetrizes retangulares dessa figura com o eixo do cone, obtêm-se dois pontos cujas distâncias a cada um dos da curva fórmão uma soma ou diferença constante.»

Consideremos o cazo da elipse.

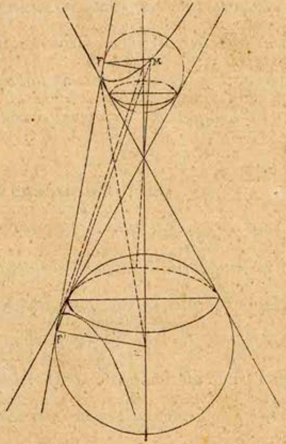



Para reconhecer similhante propriedade, nóte-se que as intersecções das bissetrizes retangulares com o eixo do cone são centros dos círculos inscritos ao ângulo do cone e tangentes ao eixo da curva. Quando o ângulo do cone descréve a superficie cônica, os dois círculos descrévem esféras tangentes ao plano da secção e que tangencião tambem o cone segundo círculos paralélos à baze deste.

Isto posto, imaginemos um dos pontos da curva e, ao mesmo tempo, a geratris que passa por ele bem como as rétas que o unem aos pontos de tangência do plano da secção com as duas esféras. Consideradas em relação a cada esféra, éssa geratris e a réta respetiva do plano da secção constitúem tangentes que pártem do mesmo ponto; a saber o ponto da elipse. Portanto as partes déssas tangentes compreendidas entre o ponto da curva e os pontos de contacto com a esféra serão iguais. Isto é, têm-se duas equações esprimindo que a distância de um ponto da curva a cada um dos dois determinados no seu eixo maiór é respetivamente igual à distância

do mesmo ponto aos pontos em que a geratris correspondente tangencia as esfêras. Somando êssas duas equações, membro a membro, tem-se que a soma das distâncias de um ponto da curva aos dois determinados no eixo maiór, é igual ao segmento da geratris compreendido entre os pontos de tangência dêsta com as esfêras. E como este segmento é constante, porque os pontos de tangência se áchão nos círculos de tangência do cone com as esfêras, ségue-se que a soma das distâncias de um ponto da curva aos dois pontos determinados no eixo maiór é constante.

Considerando finalmente esse segmento em uma das geratrizes correspondentes aos vértices da curva, vê-se que esse vértice o decompõe em duas partes respetivamente iguais à distância do mesmo vértice a cada fóco, em virtude da mesma propriedade das tangentes que pártem de um ponto para uma esfêra. Esse segmento é pois igual ao maiór eixo da elipse. O rezumo desse ezame é a definição focal da elipse, como lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois outros fixos é constante.



Cazo da hipérbole.

Si o plano secante cortasse as duas folhas do cone, uma construção análoga mostraria que a propriedade focal muda-se nésta: a diferença das distâncias de um ponto qualquér da hipérbole aos fócos é constante e igual ao eixo transvérso.

• 3 Determinação que daí rezulta para os fócos de uma elipse ou de uma hipérbole quando se conhécem os eixos.

Considerando-se na elipse as estremidades do eixo menór, vê-se que as suas distâncias aos fócos são iguais ao sêmi-eixo maiór. Donde se conclúi que a distância do centro da elipse a cada um dos fócos, ou a ecentricidade, é igual ao terceiro lado de um triângulo retângulo que tem para hipotenuza o sêmi-eixo maiór e, para outro lado, o sêmi-eixo menór.

Este rezultado fás prever que na hipérbole a ecentricidade déve ser igual à hipotenuza do triângulo retângulo que tem para catetos os dois eixos, segundo a espressão $c^2=a^2+b^2$, em virtude da observação que a equação da hipérbole rezulta da da elipse pela substituição de $b^2$ por $-b^2$. E ésta previzão é confirmada por um cálculo fácil, sem artifício algum, aplicando-se a propriedade focal. Chamando $c$ a ecentricidade, as distâncias de um ponto da curva aos dois fócos serão dadas pelas espressões:

$$\overline{MF}=\sqrt{y^2+(x-c)^2} \quad e \quad \overline{MF'}=\sqrt{y^2+(x+c)^2}$$

Donde

$$\overline{MF'}-\overline{MF}=2a=\sqrt{y^2+(x+c)^2}-\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

$$2a+\sqrt{y^2+(x-c)^2}=\sqrt{y^2+(x+c)^2}$$

$$4a^2+4a\sqrt{y^2+(x-c)^2}+y^2+x^2-2cx+c^2=y^2+x^2+2cx+c^2$$

$$4a\sqrt{y^2+(x-c)^2}=4cx-4a^2$$

$$a^2y^2+a^2x^2+a^2c^2-2a^2cx=c^2x^2+a^4-2a^2cx$$

Substituindo $a^2y^2$ pela sua espressão $b^2x^2-a^2b^2$, segundo a equação da curva:

$$b^2x^2-a^2b^2+a^2x^2-a^4=c^2x^2-a^2c^2$$

$$(a^2+b^2)x^2-a^2(a^2+b^2)=c^2(x^2-a^2)$$

$$(a^2+b^2)(x^2-a^2)=c^2(x^2-a^2)$$

ou finalmente $$c^2=a^2+b^2.$$

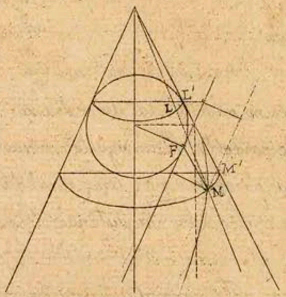
4. Propriedade focal da parábola.

Em Apolônio não se encontra vestígio de que ele conhecesse foco na parábola, a caraterística por ele adotada para as outras duas secções cônicas não se aplicando a ésta. O primeiro traço do conhecimento da propriedade focal aparece em Pappus, geômetra que paréce ter florecido em fins do 3.° século da éra católica. Isso, porem, não quér dizer que a propriedade focal da parábola tivésse sido desconhecida até então, ou mesmo que Apolônio a ignorasse. Em todo cazo, a definição focal da parábola a separa, como vamos ver, das outras duas secções cônicas. E, embóra Pappus indique a propriedade comum por meio da qual os modérnos reünirão as três secções cônicas, foi Newton quem fés prevalecer esse ponto de vista. Aliás a descubérta da gravitação ~~universal~~ planetaria mostrando que as órbitas dos astros do nósso Mundo podião ser qualquér das secções cônicas, devia conduzir o geômetra britânico a procurar um atributo geometrico para ligar as três curvas assim unidas por uma propriedade mecânica. Devemos finalmente notar que na época em que nósso Méstre preocupou-se com a regeneração do ensino matemático, a filiação histórica de similhante apreciação achava-se por tal fórma obscurecida que ele assina uma origem algébrica ao apanhado da propriedade focal comum às três cônicas.

A secção cônica é uma parábola quando o plano secante é paralelo a uma das geratrizes. Neste cazo, a construção precedentemente adotada para a elipse e a hipérbole determinaria um único ponto, porque u-

ma das bissetrizes retangulares tórna-se paraléla ao eixo do cone. A outra fica então normal a esse eixo.

A distância de um ponto da curva a esse fóco, será, como nos cazos precedentes, igual ao segmento da respetiva geratris compreendido entre ele e o ponto de tangência déssa geratris com a esféra. E para transformar éssa definição cônica em uma definição plana, consideremos o plano do circulo correspondente á ordenada do mesmo ponto. Vê-se então que a distância




focal é sempre igual ao segmento da geratris correspondente ao vértice da parábola e compreendido entre o circulo de tangência da esféra com o cone e o circulo da ordenada comum, por sêrem ambos os circulos normais ao eixo do cone. Isto posto, imaginando a intersecção do plano da parábola com o do circulo de tangência do cone com a esféra, vê-se que éssa intersecção é perpendicular ao eixo da parábola, e que a distância focal de um ponto da curva é igual à distância do mesmo ponto a éssa réta, a que se deu o nome de diretris.

Daí concluí-se a definição focal da parábola como lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo e de uma réta fixa. Désta definição rezulta a maneira de determinar o fóco e a diretris quando se conhéce o eixo da parábola e o seu parâmetro. Pois que da equação désta

$$y^2 = mx,$$

dedus-se, chamando $\underline{a}$ a distância do vértice ao fóco:

$$MF=\sqrt{y^2+(x-a)^2}=x+a$$

$$y^2+x^2+a^2-2ax=x^2+a^2+2ax$$

$$y^2=4ax;$$

donde

$4a=m$ ou $a=\frac{m}{4}$ e, para $x=a$, $y^2=4a^2$, $y=2a$.

Assim a distância do vértice ao fóco ou à diretris é igual a um quarto do parâmetro. Daí rezultão nóvas maneiras de encarar o parâmetro de uma parábola, quér como a córda perpendicular ao eixo tirada do fóco, quér como o dobro da distância do fóco à diretris.

Traçado das tres curvas por um movimento contínuo, bazeando-se nas suas propriedades focais.

5. Apreciação focal comum das três secções cônicas.

« Tal mudança na propriedade caraterística (dos fócos) paréce a princípio separar, sem motivos suficientes, a parábola das outras duas secções cônicas. A geometria geral fás diretamente cessar a anomalia reprezentando a elipse e a hipérbole como dotadas de um atributo análogo. Ele consiste em substituir a igualdade das distâncias pela sua proporcionalidade, de maneira a produzir sucessivamente as três secções cônicas, confórme a relação constante é igual, inferior ou superior à unidade.

« Nada impéde de anunciar ésta apreciação sem executá-la, a fim de terminar a quinta lição de geometria especial caraterizando, sob um aspéto comum a éssas três curvas, as suas propriedades focais. Póde-se a-

ssim dispensar a geometria geral de instituir uma teoria que não meréce figurar néla, porque não oferéce nenhum sentido concréto a respeito de outras figuras. Mas a importância desse atributo quanto às três secções cônicas déve entretanto introduzir o seu estudo na geometria preliminar. Para milhór caraterizá-la, é precizo ligar-lhe sumáriamente a determinação especial das tangentes, assim tornada quázi tão fácil como para com o circulo.»

Determinação das tangentes, bazeando-se nas propriedades focais.

Considerando-se uma secante prolongada até à diretris, reconhéce se que, em virtude da comum definição focal, as distâncias focais dos pontos de secância são proporcionais às distâncias dos mesmos pontos à intersecção da secante com a diretris. Donde rezulta que a réta de união déssa intersecção com o fóco é a bissetris do suplemento do ângulo dos dois raios vetores. Ésta propriedade perziste quando a coincidência dos pontos de secância transfórma a secânte em tangente. Mas então o ângulo dos raios vetores se anulando, o seu suplemento atinge o limite dois rétos, ao mesmo tempo que a bissetris déle se torna a réta de união entre o fóco e a intersecção da tangente com a diretris. Descóbre-se assim que, em qualquér das secções cônicas, a parte da tangente compreendida entre o ponto de tangência e a intersecção da tangente com a diretris é a hipotenuza de um triângulo retângulo, que une o fóco a esses pontos. É o que se enuncia concizamente dizendo que tal segmento subtende um ângulo réto no fóco.

Portanto, para tirar uma tangente por um ponto de uma cônica, basta unir esse ponto àquele em que a perpendicular pelo fóco ao seu raio vetor encontra a diretris[1]; o que não ezige o conhecimento da curva.

(1) Vide Charles Taylor - An Introduction to the ancient and modern

Deste teorema instituido pelos modérnos podemos deduzir as propriedades focais da tangente conhecidas dos antigos e que fornécem os meios mais simples para rezolver os problemas elementares sobre as tangentes das três curvas.

Assim, quanto à parábola, é fácil de reconhecer que a tangente é a bissetris do ângulo formado pelas duas rétas tiradas do ponto de contacto, uma ao fóco, a outra perpendicularmente à diretris. Porque o segmento da tangente compreendido entre a diretris e o ponto de tangência é a hipotenuza comum de dois triângulos retângulos que são então iguais.

« Observando aliás que éssas duas rétas são constantemente iguais, ségue-se que a tangente é sempre perpendicular ao meio da réta que une o fóco à projeção do ponto de contacto sobre a diretris: esse meio devendo cair incessantemente na perpendicular ao eixo tirada pelo vértice, vê-se tambem, como nóva fórma da mesma relação, que as projeções do fóco sobre as divérsas tangentes fórmão uma linha réta, que é a tangente ao vértice.

« Quanto ao uzo puramente geométrico de tal propriedade, éla oferéce diretamente a vantágem de adaptar-se indiferentemente à construção da tangente, nos três cazos elementares comumente correlativos, segundo se dá o ponto de contacto, ou a direção, ou um ponto esterior. Para o primeiro cazo, basta levantar uma perpendicular ao meio da réta que une o fóco à projeção do ponto de contacto sobre a diretris. É fácil de verificar especialmente, à maneira dos antigos, que tal perpendicular terá, com efeito, fóra da parábola todos os seus pontos divérsos do de tangência; pois que um qualquér dentre eles, achando-se equidistante dos estremos da mencionada réta será necessáriamente mais aprossi-

---

geometry of conics - 1881.

modo da diretris do que do fóco, e desde então exterior à curva. A determinação das tangentes à parábola não podia pois, sob éssa fórma, oferecer aos antigos nenhuma dificuldade essencial, lógo que eles pudérão proceder em virtude da propriedade focal, que, no seu módo de estudo, deveu constituir, a todos os respeitos, o principal obstáculo peculiar à teoria das secções cônicas.

« Si agóra se quizér traçar uma tangente paraléla a uma réta dada, a réta que une o fóco à projeção do ponto de contacto incógnito sobre a diretris achar-se-á imediatamente determinável, e por conseqüência a construção precedente se aplicará igualmente, sem mesmo que a intervenção gráfica da parábola seja indispensável para marcar o ponto de contacto, que será suficientemente assinalável em virtude da sua projeção sobre a diretris.

« Enfim, quando a tangente déve partir de um ponto esterior, a réta que une o fóco à projeção do ponto de contacto incógnito sobre a diretris póde-se achar ainda fácilmente, pois que éssa projeção, sempre situada na diretris, está aliás a uma distância do ponto dado igual à distância focal deste; de sórte que éla rezultará da intersecção da diretris pelo circulo descrito do ponto dado como centro e com a sua distância focal para raio. Esse encontro, necessáriamente duplo, si o ponto dado estivér verdadeiramente fóra, determinará pois as duas rétas sobre cujos meios dévem ser perpendiculares as tangentes buscadas, cuja construção se acabaria desde então como acima. Póde-se observar a este respeito, que si o ponto dado pertencesse à diretris, éssas duas rétas aussiliares, e por conseqüência as duas tangentes, serião necessáriamente retangulares: o que permite encarar a diretris como descrita pelo vértice de um ângulo réto sempre circunscrito à parábola » (_Geometria analítica_, pg. 321-324)

---

No cazo da elipse, si imaginar-se a tangente em um ponto prolongada até as diretrizes e, pelo ponto de contacto, uma perpendicular às mesmas diretrizes, verifica-se que os segmentos da tangente são proporcionais aos raios vetores. Conclúi-se daí a similhança dos triângulos retângulos que únem os fócos aos ditos segmentos, e, portanto, a igualdade dos ângulos que cada um destes fórma com o raio vetor que lhe é mais próssimo.

«A relação das tangentes para os fócos, eminentemente natural para os antigos, não resalta, na elipse, tão diretamente da equação como na parábola; e si o nósso estudo algébrico da elipse fosse históricamente original, talvês se ignorasse ainda essa propriedade, por falta de ter sido conduzido espontâneamente à combinação algébrica correspondente que os modérnos só empregão realmente para verificação. Essa verificação é de résto cômodamente ezecutável, sob as três fórmas geométricas, essencialmente equivalentes, que tal teorema compórta. A sua acepção mais conhecida e mais diréta entre os antigos, consiste em que a tangente à elipse é igualmente inclinada sobre as duas rétas que juntão o ponto de contacto aos dois fócos.

«Sob a sua segunda fórma, essa propriedade consiste em que o lugar das projeções dos fócos de uma elipse sobre as suas tangentes é um círculo. É fácil apanhar a filiação geométrica das duas relações, considerando que, em virtude da noção precedente, uma tangente qualquér, devendo ser a bissetris do ângulo formado por um dos raios vetores com o prolongamento do outro, será perpendicular ao meio da réta que une um dos fócos ao ponto obtido prolongando o outro raio vetor de um comprimento igual ao primeiro. Ora, a propriedade mútua dos dois fócos indica lógo que a projeção de qualquér dos fócos sobre a tangente cai a uma distância constante do cen-

tro, pois que êssa distância é evidentemente a metade da soma dos raios-vetores ou o sêmi-eixo maiór...

«Enfim, a terceira fórma geométrica dêssa relação das tangentes para os fócos consiste em que as distâncias dos dois fócos a uma tangente qualquér são invérsamente proporcionais, sem que se precize mencionar espréssamente o valor efetivo do seu produto constante, espontâneamente evidente nos quatro vértices, sobretudo nos do pequeno eixo, onde os dois fatores são iguais. Para ver como esse teorema, aliás fácil de constatar algébricamente, deriva do precedente, basta tirar do centro uma paralela e uma perpendicular $q$ sobre a tangente; então, chamando $p$ e $p'$ as distâncias dos dois fócos a essa tangente, uma propozição elementar bem conhecida, conseqüência imediata do teorema teocrata, dará lógo, no triângulo que une a ecentricidade ou $c$ à projeção do fóco sobre a tangente, a relação:

$$c^2 = p^2 + a^2 - 2pq,$$

pois que o lado constituido pela distância do fóco à tangente é agóra reconhecido sempre igual a $a$: óra, a distância aussiliar $q$, sendo a média entre $p$ e $p'$, ésta relação tórna-se finalmente $pp' = a^2 - c^2 = b^2$, segundo o enunciado acima.

«Dêssas três fórmas equivalentes de uma mesma lei, a primeira é a milhór adaptada à construção da tangente, quér em virtude do ponto de contacto, quér segundo a sua direção, quér enfim por um ponto esterior. Quanto ao primeiro cazo, basta, como se viu acima, tirar do ponto dado uma perpendicular sobre a linha que une um fóco ao estremo da réta que se obtem prolongando o outro raio vetor de um comprimento igual ao primeiro. Póde-se fácilmente constatar, à maneira dos antigos, que todos os outros pontos dêssa réta serão esteriores à elipse, como

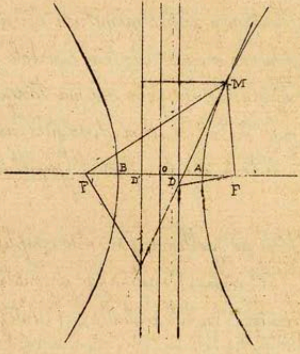
sendo equidistante dos estremos da linha que une o primeiro fóco ao dito prolongamento do segundo raio vetor; pois que a soma das suas distâncias aos dois fócos, assim equivalente à soma das distâncias dele aos estremos da réta rezultante do raio vetor prolongado, ecederá evidentemente o eixo maiór; que êssa construção reprezenta por ésta última reta. Ésta consequência é por tal módo espontânea que, na elipse como na parábola, a descubérta de similhante propriedade das tangentes deveu ser fácil aos antigos, uma vês que eles conhecêrão o teorema fundamental sobre os fócos.

«Si se precaza tirar uma tangente paraléla a uma reta dada, a inversão déssa construção fará achar sem dificuldade a estremidade do raio vetor prolongado, donde tudo decórre, como situado sobre uma perpendicular tirada a ésta réta de um dos fócos e sobre o círculo descrito do outro com o raio <u>2a</u>. Do mesmo módo, quando se dér um ponto esterior, esse círculo servirá igualmente para determinar a dita estremidade, pela intersecção de um outro círculo descrito do ponto dado com o raio igual à sua distância ao primeiro fóco. Nesses dois cazos, a construção poderá se acabar, incluzive a determinação dos pontos de contacto, sem nenhuma participação da curva.» (Geometria analítica, p. 354-355)

No cazo da hipérbole, a construção que sérve para a elipse só é modificada pelo fato de achárem-se as diretrizes do mesmo lado em relação ao ponto de tangência. Isto, porem, não impéde que, tirando a perpendicular do ponto de contacto para as diretrizes e prolongando a tangente até éstas, se reconheça a similhança dos triângulos retângulos que únem os fócos às partes da tangente compreendidas entre o ponto de contacto e as intersecções déla com as diretrizes. E daí rezultará a constatação da igualdade dos ângulos contíguos

que a tangente fórma com os raios vetores entre os quais passará.

« Quanto à propriedade da tangente à elipse em relação aos fócos, éla não esperimenta, sob a sua fórma mais igual, outra modificação real, na hipérbole, sinão a que rezulta necessariámente da nóva figura geral, a qual ezige aqui que a tangente caia sempre entre os dois fócos, em lugar de os deixar do mesmo lado; de sórte que éla se tórna então a bissetris do próprio ângulo dos dois raios vetores, e a normal do seu suplemento; as pozições déssas rétas achando-se assim mudadas, comparativamente




ao cazo primitivo. Séria supérfluo deter-se espréssamente nas conseqüências gráficas déssa propriedade, para traçar a tangente, quando se dá sucessivamente o seu ponto de contacto, a sua direção, ou um ponto esterior: éssas três construções são espontaneamente análogas às do capítulo precedente. A respeito do último cazo, póde sómente tornar-se útil deduzir a distinção dos dois módos de incidência das duas tangentes tiradas do ponto dado, que cairão sobre o mesmo ramo da hipérbole ou sobre os ramos opóstos, conforme esse ponto estivér compreendido naqueles dos ângulos das assintotas que contêm a curva ou nos seus suplementos.

« Sob a segunda fórma essencial, esse teorema não póde sofrer aqui nenhuma modificação, pois que a equação $y^2 + x^2 = a^2$ do lugar das projeções

dos fócos sobre a tangente na elipse não contem $b^2$. Esse lugar é, pois, sempre um circulo, tendo ainda para diâmetro o eixo focal; sómente em lugar de ser circunscrito à curva é-lhe agóra inscrito. Considerando as assintotas como tangentes, póde-se fácilmente constatar a confirmação especial da sua comum participação a êssa lei.

« A terceira fórma geométrica dêssa propriedade não esperimenta realmente nenhuma modificação na hipérbole: o valor efetivo do produto constante das distâncias dos dois fócos a uma tangente qualquér é aqui igualmente indicada pelos vértices, e alem disso pela assintota, única tangente que seja então equidistante dos dois fócos. (Geometria analitica, p. 378-379)

« Um só problema déve então completar esse esbôço (das propriedades focais das três cônicas), instituindo a construção dêssas curvas mediante um fóco e três passágens ou três contactos.» (Sinteze subjetiva)

«99. Entre os numerózos problemas relativos à determinação da parábola em virtude das condições peculiares ao fóco ou à diretris.... limitar-me-ei a considerar especialmente, quér a titulo de ezemplo caraterístico, quér em razão de sua utilidade real, aquele em que se dá, com dois pontos da curva, o seu fóco ou a sua diretris.

«No primeiro cazo, ésta questão de geometria abstrata compórta uma precióza destinação astronômica, para determinar o curso de um cometa mediante duas pozições observadas, adotando a felis aproximação parabólica especialmente aplicada por Newton à única parte da órbita que póde ser habitualmente vizível. Suponhamos pois que se tratasse de fazer passar em dois pontos dados uma parábola tendo um fóco dado, que, em tal aplicação a

liste; seria o sol. A propriedade focal fará achar fácilmente uma solução gráfica, que consiste em construir primeiro a diretris, como tangente comum aos dois círculos que, tendo os seus centros respetivos nesses dois pontos, se cortarião nesse fóco: essa rita uma vês achada, o eixo, o vértice e o parâmetro da parábola rezultarião dela sem dificuldade. Obter-se-ão assim duas parábolas, ordináriamente muito diferentes de pozição e mesmo de grandeza, entre as quais as indicações astronômicas dissiparião fácilmente toda indecizão. Essa construção indica aliás, confórme a natureza do problema, que a questão não póde oferecer outros cazos de impossibilidade sinão os que provirião da coincidencia de um dos pontos dados com o fóco ou da situação dos dois pontos em linha réta com o fóco e do mesmo lado.

« Suponhamos agóra que o fóco dado é substituido pela diretris; a solução gráfica se inverterá fácilmente, construindo o fóco em virtude da interseção dos dois círculos já considerados, e cujos raios serão então as distâncias dos dois pontos à diretris dada. Daí rezultarão ainda duas parábolas dezìguais, conquanto paralélas. Quanto aos cazos de impossibilidade, consistirião primeiro na passágem da diretris por um dos pontos dados, ou na sua perpendicularidade à réta que os une; mas, alem déssas hipótezes relativas a condições precizas, a questão comportará outras exeções, de natureza vaga, quando por exemplo, a diretris cair entre esses dois pontos, ou, em geral, si estes fôrem demaziado afastados. » (Geometria analitica, 315-319)

« Estendendo à elipse o problema já rezolvido no nº 99, quanto à parábola, e que consiste aqui em determinar uma elipse mediante um fóco e três pontos, ele adquire ainda maiór importância astronômica, como diretamente relativo à verdadeira figura média das órbitas planetárias. A sua so-

lução gráfica, que consiste sempre em construir primeiro a diretris correspondente, rezultará de que as distâncias dêssa reta aos três pontos dados são então proporcionais às suas distâncias conhecidas ao fóco dado. Óra, cada uma dêssas duas proporções, izoladamente considerada, determina a intersecção da diretris com a reta de junção dos pontos respetivos: é fácil de reconhecer, em virtude de um teorema elementar[1], que esse encontro se acha na diretris do suplemento do ângulo das duas rétas que vão desses pontos ao fóco. A diretris sendo assim obtida mediante dois dos seus pontos, será fácil acabar a construção, traçando primeiro o eixo focal, depois os seus dois vértices e o centro, donde rezultarão lógo o outro fóco, a outra diretris e o outro eixo. Quanto aos cazos de impossibilidade, eles não pódem provir aqui sinão da confuzão do fóco com um dos pontos, ou da dispozição destes em linha reta, quér entre todos três, quér entre dois somente e o fóco do mesmo lado. Ésta construção os manifestaria pela passágem da diretris obtida, óra pelo fóco, óra por um dos pontos. (Geometria analitica, p. 347)

« Si retomarmos, quanto à hipérbole, o problema, primeiro tratado para a elipse, que consiste em determinar a curva mediante um fóco e três pontos, poderemos agóra completar a solução, sempre sujeita à mesma marcha. A construção já esplicada supunha tácitamente que a diretris procurada devia constantemente deixar os três pontos dados de um mesmo lado, como o ezige necessáriamente a elipse, e tambem a parábola. Mas para a hipérbole, póde dar-se o contrário, e desde então esse traçado não dá todas as soluções admissíveis: é precizo aqui, em relação a cada um dos pontos da diretris assim deter

[1] O mesmo donde deduzímos a propriedade comum das tangentes às cônicas.

minados, aceitar demais a pozição compreendida entre os dois pontos dados correspondentes, e que são marcados, sobre a rĕta de junção, pela bissetris do ângulo cujo suplemento só haviamos considerado. Daí rezúltão finalmente quatro soluções: as três nóvas não pódem jamais convir sinão a hipérboles; só a primeira será hiperbólica, eliptica ou mesmo parabólica, confórme a diretris obtida se achar mais aprossimada, mais longe, ou tão afastada dos pontos dados quanto o é do fóco. (<u>Geometria analitica</u>, p. 376)

«É aqui o lugar de mencionar um problema interessante, que omiti em relação à elipse, afim de evitar toda repetição supérflua, mas que por sua natureza convem igualmente às duas curvas e mesmo, em cértos cazos à parábola. Ele consiste em determinar uma cônica mediante o seu fóco e três tangentes. A solução gráfica depende da consideração das projeções do fóco dado sobre as tangentes. Quando éssas três projeções estivérem ecepcionalmente em linha rĕta, a curva será uma parábola, cuja determinação ulterior será fácil[1] (Porque éssa rĕta será a tangente ao vértice da parábola, desde então rezultante da intersecção déla com a sua perpendicular tirada do fóco e que é o eixo. Daí decórre a determinação da diretris e do parâmetro). Em qualquér outro cazo, traçar-se-á o circulo correspondente, e, segundo o fóco dado achar-se interior ou esterior a ele, ter-se-á uma elipse ou uma hipérbole: o seu eixo focal estando assim obtido, em grandeza e pozição, será fácil acabar a construção conforme a natureza da curva. Si o conjunto dos dados fosse disposto de maneira a fazer passar um circulo aussiliar pelo fóco conhecido, éssa indicação se referiria evidentemente a um novo cazo

---

(1) Vide tambem pag. 326 da <u>Geometria analitica</u>.

de impossibilidade, alem dos que são relativos ao paralelismo das três tangentes, ou ao seu concurso em um mesmo ponto, ou à situação do fóco sobre uma dêlas» (Geometria anal. p. 380)

6. Apreciação da parábola, da elipse, e da hipérbole como secções do cone circular obliquo.

«Fundado sobre a geração particular ao cone própriamente dito, o estudo esboçado nésta lição oferéce tal especialidade que ele não póde ser assás realizado si o cone, ficando circular, tórna-se obliquo. Nada impéde todavia de estender a esse cazo a comparação fundamental com o circulo e a equação que éla fornéce, contanto que o plano secante sêja perpendicular ao plano principal do cone.[1] Estudada especialmente quanto à situação elíptica, a secção tórna-se circular si o seu eixo for inclinado sobre uma das geratrizes estremas como a outra sobre a baze.»

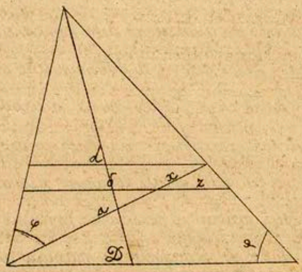
$$y^2 = z(\delta - z)$$

$$\frac{z}{x} = \frac{\mathcal{D}}{a} \qquad z = \frac{\mathcal{D}}{a}x$$

$$\frac{\delta - z}{a - x} = \frac{d}{a} \qquad \delta - z = \frac{d}{a}(a - x)$$

$$y^2 = \frac{\mathcal{D}d}{a^2}x(a - x)$$

$$y^2 = \frac{\mathcal{D}d}{a}x - \frac{\mathcal{D}d}{a^2}x^2$$




O pequeno eixo corresponderá a

$$x = \frac{1}{2}a$$

$$b^2 = \frac{\mathcal{D}d}{a}\,\frac{a}{2} - \frac{\mathcal{D}d}{a^2}\cdot\frac{a^2}{4}$$

ou $$b^2 = \frac{2\mathcal{D}d}{4} - \frac{\mathcal{D}d}{4} = \frac{1}{4}\mathcal{D}d$$

---

[1] Plano principal do cone é o que é perpendicular à baze

ou $b = \frac{1}{2}\sqrt{Dd}$

Óra, si a secção for anti-paraléla, os triângulos separados pela diagonal do trapézio caraterístico serão similhantes. Virá então:

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{D} \quad \text{ou} \quad dD = a^2 \quad \text{ou} \quad a = \sqrt{Dd};$$

por onde se vê que $b = \frac{1}{2}a$; isto é, que os dois eixos serão iguais e, portanto, que a curva é um circulo.

«Devêmos ligar uma importância especial a éssa propriedade notável, porque éla forneceu, ao segundo geômetra da antiguidade (Apolônio), a lei da construção dos mapa-~~mundos~~. Póde-se assim reconhecer que, em tal sistema de cartas, todo circulo terréstre se acha reprezentado por um circulo, cujo centro e raio tórnão-se fácilmente assinaláveis, por meio das latitudes e das longitudes, sobretudo para os cazos uzuais.» mundi

A secção feita, na esféra, por um plano é um circulo cujo plano é perpendicular ao raio da esféra que passa pelo centro do circulo. Portanto todo plano perpendicular ao desse circulo e que passa pelo seu centro, passará pelo centro da esféra, isto é, será um circulo mássimo. Vê-se por aí que si imaginar-se um cone qualquér tendo por baze um circulo da esféra, o plano principal desse cone será o plano de um circulo mássimo. o plano de

Óra, na construção dos mapa-~~mundos~~, considéra-se cada ponto da esféra projetado sobre o plano de um circulo mássimo pela reta que une esse ponto a um dos pólos do dito circulo mássimo. Tem-se assim a perspetiva desse ponto quando o ponto de vista é o pólo em questão: a perspetiva de um objéto é pois a sua projeção cônica sobre um plano. Os quadros estéticos são perspetivas ou projeções cônicas dos objétos reprezentados. Nos dezenhos técnicos mundi

prefére-se a projeção cilíndrica ortogonal. Segundo o módo de projeção geo-gráfica mais uzual, o plano do quadro é o plano de um meridiano cujo pólo indica o ponto de vista, assim colocado sobre o equador. Cada ponto da esféra é então determinado pela sua distância angular ao equador (latitude) e pela distância angular do seu meridiano a um meridiano convencionado (longitude). Na projeção geográfica mais uzual, as longitudes se côntão do meridiano cujo plano sérve de quadro. Para comodidade da descrição nós imaginaremos que se trata da construção de um mapa-mundf néssas condições. Mas é claro que os raciocinios se aplicarão a qualquér mapa-mundf, substituindo o meridiano e o equador pelos circulos mássimos que então fizérem o papél destes no nósso cazo.

Isto posto, comecemos por notar que o triângulo principal do cone projetante de um circulo qualquér da esféra acha-se então inscrito num circulo mássimo cujo plano é normal ao de projeção. A projeção desse circulo mássimo será pois uma séta que coincidirá com o diâmetro que ele tem no plano de projeção. E éssa projeção ficará determinada desde que se conhecer um dos seus pontos, alem do centro. O ângulo da baze do cone com uma das geratrizes estremas terá por medida a metade de um arco do circulo mássimo que circunscréve o triângulo principal do cone. E, comparando esse ângulo com o que é formado com a outra geratris pelo plano de projeção, se reconhéce a igualdade de ambos entre si. Donde se conclúi que o plano de projeção determina sempre uma secção anti-paraléla nos cones obliquos que correspôndem aos circulos quaisquér da esféra.

Para determinar, pois, a projeção de um circulo qualquér da esféra, nesse sistema, basta conhecer a pozição do centro e o raio do circulo projetado. Óra, esses elementos ficão conhecidos desde que se tivér a pozição da séta

correspondente à intersecção do plano de projeção com o plano principal do cone e a projeção do diâmetro principal da baze deste. Ambas êssas condições pódem ser fácilmente sastisfeitas mediante o conhecimento das latitudes e longitudes, como passamos a mostrar.

Quanto à pozição da réta correspondente à intersecção do plano de projeção com o plano principal do cone, ficará assinalada desde que se conhecer a projeção do pólo da baze do cone. O que nos será proporcionado pela intersecção da projeção do seu meridiano com a projeção do seu paralélo. Quanto à projeção do diâmetro principal da baze, ficará determinado pelas projeções dos seus estremos, os quais nos serão dados imediatamente pela épura que contem o triângulo principal do cone, ou pelas intersecções das projeções dos meridianos e dos paralélos respetivos. Assim, tudo depende, em última análize, da determinação das projeções dos paralélos e dos meridianos.

Consideremos os paralélos. Os centros dos círculos projetados se acharão na linha dos pólos ou eixo; e as intersecções desse eixo com as córdas correspondentes já à latitude, já ao complemento da latitude aumentado de um quadrante, darão os estremos dos mesmos círculos. Isto bastará para traçar os círculos projetados.

No cazo dos meridianos, os centros dos círculos projetados se achão no diâmetro do equador do qual se côntão as longitudes, e que é perpendicular áquele no qual está o ponto de vista. As intersecções desse diâmetro com as córdas, já do complemento da longitude, já da longitude aumentada do quadrante, darão, em grandeza e pozição, o diâmetro do círculo projetado. Isto bastará, pois, para traçar a projeção de cada me-

ridiano.

7. Rezumo e concluzão.

R. Teixeira Mendes.
42. Rua Benjamin Constant

Rio, 8 de Gutenberg de 110
20 de Agosto de 1898

# Errata

Correções mais importantes.

Pag. 21, penúltima linha — em vês de do eixo deste, leia-se do eixo désta.

Pag. 24, linha 22 — acrecente-se —, quando se considéra o tipo abstrato; em Astronomia convirá tomar a equação polar.

Pag. 27, linha 9 — em vês de pelo plano, leia-se pelos planos.

Pag. 30, linha 6 — em vês de eixo leia-se área.

" " linha 14 — em vês de alongamento leia-se alargamento.

Pag. 40, linha 21 — em vês de os problemas leia-se aos problemas.

Pag. 46, linha 14, em vês de universal leia-se planetária.

Pag. 48, linha 6 — em vês de $v^2 = 4a^2$, $v = 2a$, leia-se $y^2 = 4a^2$, $y = 2a$.

Pag. 49, linha 13 — em vês de transfórmão, leia-se transfórma.

Pag. 61, linhas 9 e 19, em vês de mapa-mundos, leia-se mapa-mundi.

" " linha 16 — em vês de será um circulo mássimo leia-se será o plano de um circulo mássimo.

Pag. 62, linhas 8 e 9 — em vês de mapa-mundo, leia-se mapa-mundi.

Terminando hoje a impressão da 10ª lição de Geometria Preliminar, cumprimos o dever de comunicar aos nóssos assinantes que dispendêmos com este trabalho 89.000 réis, tendo tirado 170 ezemplares, cada um dos quais saiu pois pelo preço de 523 réis.

Aproveitando a oportunidade, aqui repetimos a declaração, que já tivemos ocazião de fazer, de que nós somos os únicos responsáveis não só pelo serviço da impressão como tambem pela distribuição das lições que formos copiando.

Sobre a ortografia empregada nésta cópia, veja-se o opúsculo Nórmas ortográficas por Miguel Lemos, Diretor do Apostolado Pozitivista do Brazil.

Rio de Janeiro, 13 de Arquimédes de 114 / 7 de Abril de 1902.

Francisco Bueno Hórta Barbóza
Nicolau Bueno Hórta Barbóza

Larangeiras, 125